ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
105

For Senior & Graduate Courses

# ディラック方程式

## 相対論的量子力学と量子場理論

◆

日笠 健一　著



サイエンス社

SGC ライブラリ-105

# ディラック方程式

相対論的量子力学と量子場理論

日笠　健一　著

サイエンス社

第 1 章では，まず発見法的にディラック方程式を構成し，ディラックスピノルと呼ばれる 4 成分の量が導入されることを見ます．自由粒子の場合の方程式の解を求め，また電磁場との相互作用を含めた方程式を書き下ろします．さらに非相対論領域における展開式を導き，相対論的な効果による補正を求めます．

第 2 章では，時間によらない中心力場の中でのディラック方程式の変数分離を行い，さらにクーロン場の場合の解を求め，水素原子のスペクトルを導き，非相対論的量子力学の場合からの補正を導出します．ここではスピン・軌道相互作用などのスペクトルの微細構造が自動的に相対論的補正として現れます．

第 3 章からは，相対論的な理論構成に移り，まずディラック方程式を相対論的な共変性の見やすい形に書き直し，ディラック方程式があらゆる座標系（慣性系）において同じ形をとることを証明します．これによりディラック方程式が真に相対論的な理論であることがわかります．また，ここで導入されるガンマ行列を用いて，ディラックスピノルからさまざまな量を構成します．第 3 章以降を読むには，第 1 章の 1.5 節までを読んでおけばよく，1.6 節から第 2 章までとは独立して読めます．

第 4 章では，ディラック方程式に不可避な負エネルギー解の解釈として，反粒子の存在が帰結されることを議論し，反粒子を記述するための道具立てを述べます．

第 5 章は，ディラック方程式が記述するスピン 1/2 粒子の状態のつくる量子力学的な状態空間の構造を議論し，それを記述するディラックスピノルを構成します．

第 6 章では，粒子の生成消滅を記述できる量子場の概念を述べ，必要な事項を簡単に説明したのち，ディラック場の生成消滅演算子による展開を求めます．

第 7 章では，スピン 1/2 粒子を記述する場として，ディラック場以外のヴァイル場，マヨラナ場を定義し，それらの間の関係を議論します．

第 8 章では，まずディラック場とスピン 1/2 粒子の状態がローレンツ変換のもとでどのようにふるまうかを導き，続いて重要な離散的変換である荷電共役 $C$，空間反転 $P$，時間反転 $T$ のもとでの変換性を議論し，CPT 定理について述べます．

第 9 章では素粒子物理学におけるディラック方程式の位置づけについて簡単に触れてまとめとします．

付録では，本文中で必要な事項や，数学的な部分をまとめました．付録 A では電磁気学，付録 B では特殊相対論の基礎的な事項で，本文に関連の深い事項をおさらいしました．付録 C では，角運動量と関連の深い球面調和関数の性質をまとめています．付録 D は，ガンマ行列のさまざまな性質，関連する公式など，数学的な証明と実用的な事項を合わせて述べました．付録 E は，時空の次元を 4 次元から一般の $D$ 次元にしたときのガンマ行列およびスピノルの性質をまとめました．最後に付録 F では，量子力学における時間反転について，その特異な性質を紹介してあります．

最後になりますが，サイエンス社の平勢耕介さんには大変お世話になりました．この場を借りてお礼を申し上げます．

**2013 年 12 月**

**日笠 健一**

# 目　次

# 第 1 章 ディラック方程式

シュレーディンガー，ハイゼンベルクらにより量子力学がつくられたのは 1925 年から 26 年であるが，早くも 1928 年にはディラックによって電子を記述する相対論的な方程式であるディラック方程式が発表されている.

相対論的なエネルギーと運動量の関係は，量子力学におけるエネルギーと振動数，運動量と波数の対応により，振動数と波数の間の分散関係に焼き直されるが，これをみたす波動方程式がクライン・ゴルドン方程式である．この方程式は時間の 2 階微分を含んでいるが，ディラックは，シュレーディンガー方程式と同様に時間の 1 階微分のみを含む方程式として，ディラック方程式を見出した．本章では，ディラック方程式を導出し，その非相対論的な領域での近似を議論する.

## 1.1 シュレーディンガー方程式と相対性理論

量子力学の根底にある粒子と波動の対応関係は，光に対しアインシュタイン (1905, 1916) が，物質に対してはド・ブローイ (1923) が見出したものであり，粒子のふるまいを表すエネルギー・運動量と，波動を特徴づける振動数・波数との間の関係である.

量子力学的波動に対応する粒子のエネルギー $E$，運動量 $\boldsymbol{p}$ は，波の振動数，波数とそれぞれ関係

$$E = \hbar\omega\,, \quad \boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

をみたす．この関係式に現れるプランク定数 $\hbar = h/2\pi$ は光速 $c$ と並ぶ自然界の普遍定数である.

念のため，波の時間的，空間的なふるまいは，それぞれ振動数，波数によって特徴づけられる．一定振動数，一定波数の波の振幅は

$$a(\boldsymbol{x},t) = A_0 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \delta)$$

（$A_0$, $\delta$ は定数）と書くことができる．あるいは，

$$a(\boldsymbol{x},t) = A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t) + B\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)$$

または

$$a(\boldsymbol{x},t) = A_+ e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} + A_- e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$$

とも書ける．

角振動数 $\omega$ は，単位時間に波の位相が何ラジアン進むか，また角波数 $\boldsymbol{k}$（の大きさ）は，単位長さあたり波の位相が何ラジアン進むかを示す量である．振動数 $f$ は単位時間に波の位相が何回転するかを表す量なので，$\omega = 2\pi f$ の関係がある．また，波数と角波数の間にも同様の関係がある．今後はもっぱら角振動数，角波数を用いるので，以後簡単のため「角」を省略して，角振動数，角波数をそれぞれ振動数，波数と書くことにする．

相対論的には*1)，時刻と位置が 4 次元ベクトル $x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ をなすのと同様，エネルギーと運動量，振動数と波数はそれぞれ 4 次元ベクトル

$$p^\mu = (E/c, \boldsymbol{p}), \tag{1.2}$$

$$k^\mu = (\omega/c, \boldsymbol{k}) \tag{1.3}$$

をなす．これと式 (1.1) を見比べると，(1.1) は 2 つの 4 次元ベクトルの間の関係

$$p^\mu = \hbar k^\mu \tag{1.4}$$

であり，相対論と両立することがわかる．このことは，関係 (1.1) が物質粒子に対しても，相対論的な対象である光についても等しく成立することからも想像されよう．

一方，非相対論的な物質粒子に対しては，（外力のない場合）分散関係式

$$E = \boldsymbol{p}^2/2m \tag{1.5}$$

が成立する*2)．この分散関係式をみたすような波

$$\psi(\boldsymbol{x},t) \sim e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar}, \qquad E = \boldsymbol{p}^2/2m \tag{1.6}$$

を解に持つ波動方程式が**シュレーディンガー方程式**

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{1.7}$$

---

*1)　以後断らない限り相対論といえば特殊相対論を意味する．

*2)　本来，分散関係式とは，波の振動数と波数の間の関係 $\omega = \omega(\boldsymbol{k})$ であるが，量子力学では，(1.1) により，エネルギーと運動量の関係 $E = E(\boldsymbol{p})$ をも分散関係式と呼ぶ．

である．時間依存性が

$$e^{-iEt/\hbar}$$

の形であることに注意する．シュレーディンガー方程式は古典力学の運動方程式と異なって時間の 1 階微分方程式なので，時間の実三角関数 $\cos(Et/\hbar)$, $\sin(Et/\hbar)$ は解とならない．振幅が複素数であることは量子力学の本質の一つである[*3]．

この解 (1.6) の形

$$e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar} \tag{1.8}$$

を見ると，エネルギー，運動量はそれぞれ時間，空間の微分と対応関係

$$E \Longleftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{p} \Longleftrightarrow -i\hbar\nabla \tag{1.9}$$

がつくことがわかる．4 次元ベクトルを用いるとこの関係は

$$p^\mu \Longleftrightarrow i\hbar\partial^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{1.10}$$

とまとめて表すことができる．

シュレーディンガー方程式は時間と空間について非対称な形をしているが，その起源は非相対論的分散関係式 (1.5) である．シュレーディンガー方程式を（外力ポテンシャル $V$ も含めて）

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = H\psi(\boldsymbol{x},t), \tag{1.11}$$

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V \tag{1.12}$$

の形に書くと，ハミルトニアン $H$ の形が非相対論的であること，すなわち，非相対論的な運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和に書かれていることが，非対称性の起源になっていると言える．

相対論と矛盾しない波動方程式を導くには，相対論的なエネルギーと運動量の関係式

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4 \tag{1.13}$$

をみたす波を解に持つ方程式を探せばよい．これは今までの説明から，

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\boldsymbol{x},t) = -\hbar^2c^2\nabla^2\psi(\boldsymbol{x},t) + m^2c^4\psi(\boldsymbol{x},t)$$

であることがわかる．整理すると

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{1.14}$$

---

*3) $e^{+iEt/\hbar}$ が解になる方程式を考えてもよいが，規約として $e^{-iEt/\hbar}$ を選ぶ．

となる．この方程式を**クライン・ゴルドン方程式**と呼ぶ[*4]．微分の部分は

$$\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{1.15}$$

とまとめられるので，$\kappa = mc/\hbar$ と定義すると，クライン・ゴルドン方程式は

$$(\partial^2 + \kappa^2)\psi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{1.16}$$

という簡単な形に書ける．ここで量 $\kappa$ は，質量 $m$ に対するコンプトン波長

$$\lambdabar = \frac{\hbar}{mc} \tag{1.17}$$

の逆数 $\kappa = 1/\lambdabar$ である．$\psi$ に掛かる演算子 $\partial^2 + \kappa^2$ はクライン・ゴルドン演算子と呼ばれ，明らかに相対論的に不変な形をしている．

この方程式の解で (1.8) の形を持つものは，関係 (1.13) をみたさなければならないことはすぐにわかる．従って，この解を量子力学的な波動関数と解釈すると，エネルギー固有値は

$$E = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{1.18}$$

となり，負の値を持ちうる．しかも，その下限は存在しない．

さらに，波動関数の確率解釈にも以下のように問題が生ずる．非相対論的なシュレーディンガー方程式の解である波動関数の絶対値 2 乗

$$P(\boldsymbol{x}, t) = |\psi(\boldsymbol{x}, t)|^2 \tag{1.19}$$

は，粒子の存在確率密度と解釈される．$P$ と確率流密度

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*)\psi\right) \tag{1.20}$$

は，連続方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{1.21}$$

をみたし，確率の保存（粒子が全空間のどこかにいる確率は時間によらず一定 $(=1)$ ）が導かれる．クライン・ゴルドン方程式の場合，上と同様に $P$ を定義すると，連続方程式をみたさない．逆に連続方程式をみたす $P$ は存在する

$$P(\boldsymbol{x}, t) = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi\right) \tag{1.22}$$

が，これは正定値ではないので，確率密度と解釈できない．

これらの問題は，$\psi$ を波動関数としてではなく，量子化された場とすれば解決するのであるが，ディラックはクライン・ゴルドン方程式が時間の 2 階微分を含むことがこの原因であると考え，時間の 1 階微分方程式 (1.11) の形で相対論的な分散関係式を導くような方程式を探し，ディラック方程式に到達したのである．

---

*4) この方程式はシュレーディンガーをはじめとする 6 組 7 人によりほぼ同時に導かれたが，通常そのうちの 2 名の名前をとって呼ばれる．

## 1.2 ディラック方程式

時間の 1 階微分方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = H\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{1.23}$$

で，相対論的な関係 (1.13) と相反しないハミルトニアン $H$ を見つけたい．時間と空間の対称性から，$H$ は 1 階の空間微分のみを含むとするのが自然である．そこで，まず $H$ として

$$H = \boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\hbar c\nabla) + \beta mc^2 \tag{1.24}$$

という形を仮定する．$\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$ および $\beta$ は無次元の「定数」である．($H$ がエネルギーの次元を持つことから，$\hbar$, $c$ の入り方は決まる.) 方程式 (1.23) の解として $\psi \propto e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar}$ の形を想定すると，

$$E\psi = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}c + \beta mc^2)\psi$$

となり，これを 2 回使うと

$$E^2\psi = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}c + \beta mc^2)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}c + \beta mc^2)\psi \tag{1.25}$$

となる．右辺の $\psi$ にかかっている部分を展開すると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2 p_i^2 c^2 + \sum_{i<j}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)p_ip_jc^2 \\ + \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_imc^3 + \beta^2m^2c^4\end{aligned} \tag{1.26}$$

となるが，これが $\boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4$ となってほしいので，そのためには，$\alpha_i, \beta$ は

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \tag{1.27a}$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \qquad (i \neq j), \tag{1.27b}$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \tag{1.27c}$$

をみたさなければならない．下の 2 式は $\alpha_i, \beta$ がお互いに反可換であることを意味しているので，これらは通常の複素数ではありえない．行列とすれば可能になるが，最低何次元の行列が必要であろうか.

関係 $\alpha_i^2 = 1$ と (1.27b) は，まとめて

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \tag{1.28}$$

と書くことができるが，これはちょうど 2 次のパウリ行列 $\sigma_i$ のみたす性質と同じ形である．ところが，任意の 2 次行列は $\sigma_i$ と単位行列 1 の線形結合に書けてしまうので，2 次では $\beta$ が作れないことは計算してみれば直ちにわかる.

3 次でも存在せず[*5)]，最低 4 次の行列が必要である．具体的な形として

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.29a}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.29b}$$

とすれば，性質 (1.27) がすべてみたされることがわかる．ここで 1, 0 はそれぞれ 2 次の単位行列，零行列である[*6)]．ハミルトニアンはエルミート演算子である必要があるので，行列 $\alpha_i, \beta$ はエルミート行列でなければならないが，これらは確かにそうなっている．

このようにハミルトニアンは 4 次の行列で表され，それが作用する $\psi$ は 4 つの成分を持つ量

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\boldsymbol{x}, t) \\ \psi_2(\boldsymbol{x}, t) \\ \psi_3(\boldsymbol{x}, t) \\ \psi_4(\boldsymbol{x}, t) \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

である．このようにして導かれた $\psi$ に対する方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x}, t) = -i\hbar c\,\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{x}, t) + mc^2\beta\psi(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.31}$$

を**ディラック方程式**と呼ぶ．ディラック方程式はこの 4 成分の量に対する（連立）波動方程式ということになる．4 成分といっても，後で詳しく見るように 4 次元ベクトルとは性質の全く異なる量であり，**4 成分スピノル**あるいは**ディラックスピノル**と呼ぶことにする．

確率密度の候補として，正定値の量

$$P = \psi^\dagger\psi = \sum_{\alpha=1}^{4} |\psi_\alpha|^2 \tag{1.32}$$

をとる（† はここでは行列としてのエルミート共役，つまり複素共役と行列としての転置をとること）と，その時間微分は

---

*5) $\alpha_i^2 = 1$ より，$\alpha_i$ の固有値は $\pm 1$ である．また $\alpha_i = \alpha_i\alpha_j^2 = -\alpha_j\alpha_i\alpha_j$ $(i \neq j)$ より $\operatorname{tr}\alpha_i = -\operatorname{tr}(\alpha_j\alpha_i\alpha_j) = -\operatorname{tr}(\alpha_i\alpha_j^2) = -\operatorname{tr}\alpha_i = 0$ なので，固有値 $+1$ と $-1$ は同数でなければならない．従って $\alpha_i$ は偶数次の行列となる．

*6) 具体的に 4 行 4 列で書くと，

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} & & & -i \\ & & i & \\ & -i & & \\ i & & & \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

空白の要素は 0 を省略してある．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\psi + \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} \\
&= -c(\nabla \psi^\dagger)\cdot \boldsymbol{\alpha}\psi + \frac{imc^2}{\hbar}\psi^\dagger \beta\psi - c\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi - \frac{imc^2}{\hbar}\psi^\dagger\beta\psi \\
&= -\nabla\cdot\left(c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi\right)
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

と書ける．ここでディラック方程式の転置複素共役

$$
-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger = i\hbar c\nabla\psi^\dagger\cdot\boldsymbol{\alpha} + mc^2\psi^\dagger\beta \tag{1.34}
$$

を用いた．式 (1.33) は連続方程式の形をしているので，

$$
\boldsymbol{j} = c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi \tag{1.35}
$$

は確率流密度と解釈でき，**確率の保存**が成り立つことになる．

さて，上では性質 (1.27) をみたす $\alpha_i, \beta$ を一組挙げたが，このような $(\alpha_i, \beta)$ の組は無数に存在する．後で証明するように，任意のこのような行列の組 $(\alpha_i, \beta)$ と $(\alpha_i', \beta')$ に対し，ある 1 つのユニタリ行列 $U$ が存在し，

$$
\alpha_i' = U\alpha_i U^{-1}\ , \qquad \beta' = U\beta U^{-1} \tag{1.36}
$$

となる．このことは，あらゆる $(\alpha_i, \beta)$ の組には本質的な違いはなく，一つの組から別の組に移ることは，4 成分スピノル空間の座標系の取り方を変える（座標系間の変換行列が $U$）ことに対応し，物理的には同値であることを意味する．具体的な形としては，今後多くの場合上の形 (1.29) を用いることにする．これを**ディラック表示**と呼ぶ．

## 1.3 ディラック方程式の解

ディラック方程式

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = H\psi(\boldsymbol{x},t) = (-i\hbar c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + mc^2\beta)\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{1.37}
$$

の解を求めよう．それには，ハミルトニアンの固有関数

$$
H\widetilde{\psi}(\boldsymbol{x};E) = (-i\hbar c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + mc^2\beta)\widetilde{\psi}(\boldsymbol{x};E) = E\widetilde{\psi}(\boldsymbol{x};E) \tag{1.38}
$$

を求める．非相対論的量子力学の場合と同様，エネルギー固有状態は時間依存性

$$
\psi(\boldsymbol{x},t) = \widetilde{\psi}(\boldsymbol{x};E)e^{-iEt/\hbar} \tag{1.39}
$$

を持ち，一般の解はこれの重ね合わせで表されるはずである．さらに，運動量演算子[*7] $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ は明らかにハミルトニアンと可換なので，同時固有関数

*7) 運動量演算子には $\mathbf{p}$ の記号を使い，固有値 $\boldsymbol{p}$ と区別することにする．

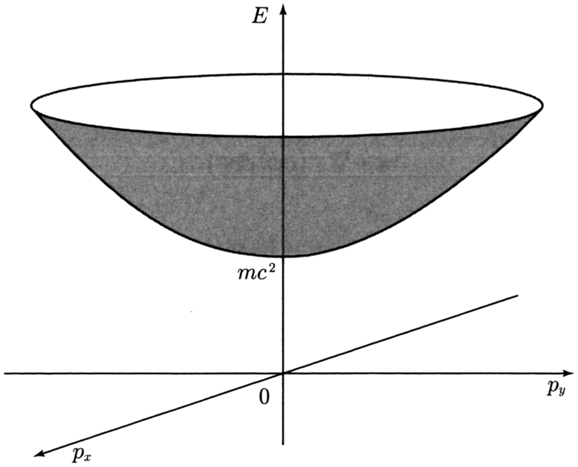



**図 1.1** 相対論的なエネルギーと運動量の関係（分散関係）．$p_z$ 軸は書けないので省略してある．

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = w(\boldsymbol{p},E)e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar} \tag{1.40}$$

が存在し，ハミルトニアンの固有関数は一般にはこれの線形結合で表される．この形を (1.37) に代入すると，

$$(E - c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - mc^2\beta)w(\boldsymbol{p},E) = 0 \tag{1.41}$$

が得られる．これに $E + c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + mc^2\beta$ をかけて，$\boldsymbol{\alpha}$, $\beta$ の関係 (1.27) を用いると，

$$(E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 - m^2c^4)w(\boldsymbol{p},E) = 0 \tag{1.42}$$

となる．これより，相対論的な分散関係式

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4 \tag{1.43}$$

が導かれる（図 1.1）．一つのエネルギー固有値に対し，運動量の大きさは (1.43) により決まるが，運動量の向きに相当する無限次元 2 自由度の縮退がある．

エネルギー固有値は連続スペクトルをとるが，$E^2 \geq m^2c^4$ の条件がつく．等式が成り立つ場合は，$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ （静止系）であり，この場合には今述べた縮退がない．$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ に対し，方程式 (1.41) は

$$(E - mc^2\beta)w(\boldsymbol{0},E) = 0 \tag{1.44}$$

となる．行列 $\beta$ の形 (1.29b) を用い，また

$$w(\boldsymbol{0},E) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\zeta} \end{pmatrix} \tag{1.45}$$

と上 2 成分，下 2 成分に分けて書くと，

$$\begin{pmatrix} E-mc^2 & 0 \\ 0 & E+mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\zeta} \end{pmatrix} = 0. \tag{1.46}$$

これは 2 つの独立な方程式

$$(E-mc^2)\tilde{\varphi} = 0, \tag{1.47a}$$

$$(E+mc^2)\tilde{\zeta} = 0 \tag{1.47b}$$

に分解され，$E = mc^2$ に対しては $\tilde{\varphi} = \chi$ （任意），$\tilde{\zeta} = 0$ が解となる．したがってディラック方程式の解は

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2 t/\hbar} \tag{1.48}$$

（$\chi$ は任意の 2 成分ベクトル，0 は 2 成分の 0 ベクトル）となる．

$\chi$ は任意の 2 成分量なので，独立な解として

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

の 2 つがある．これは何を意味するのであろうか．のちに 3.3 節において示すように，実はこれはスピン 1/2 の粒子の 2 つの独立な自由度（スピンの上向き，下向き）に対応している．すなわち，ディラック方程式はスピン 1/2 の粒子（以下ディラック粒子と呼ぶ）を記述する波動方程式である．

方程式 (1.47) は，これ以外に $E = -mc^2$ のときに解

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} e^{+mc^2 t/\hbar} \tag{1.50}$$

が存在する．この $E < 0$ の解は一見物理的に無意味であるが，その意味は第 4 章以下で述べる．

運動量が 0 でない場合は，方程式 (1.41) は

$$\begin{pmatrix} E-mc^2 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c & E+mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\zeta} \end{pmatrix} = 0 \tag{1.51}$$

となり，これは $\tilde{\varphi}, \tilde{\zeta}$ についての連立方程式

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c\,\tilde{\varphi} = (E+mc^2)\tilde{\zeta}\,, \tag{1.52a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c\,\tilde{\zeta} = (E-mc^2)\tilde{\varphi} \tag{1.52b}$$

となる．$E \neq \pm mc^2$ ならば，(1.52) は

$$\tilde{\zeta} = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E+mc^2}\tilde{\varphi}\,, \tag{1.53a}$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E-mc^2}\tilde{\zeta} \tag{1.53b}$$

と同等で，(1.53a) を (1.53b) に代入すると

$$\tilde{\varphi} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}c}{E - mc^2} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}c}{E + mc^2} \tilde{\varphi} = \frac{\boldsymbol{p}^2 c^2}{E^2 - m^2 c^4} \tilde{\varphi} \tag{1.54}$$

となるので，$E^2 = \boldsymbol{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ が満足されていれば矛盾なく解が存在する．この解は $E = E_{\boldsymbol{p}} \equiv \sqrt{\boldsymbol{p}^2 c^2 + m^2 c^4} > 0$ に対し，任意の $\chi$ を用いて

$$w(\boldsymbol{p}, E_{\boldsymbol{p}}) = \begin{pmatrix} \chi \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}c}{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \chi \end{pmatrix}, \tag{1.55}$$

したがって

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} \chi \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}c}{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \chi \end{pmatrix} e^{i(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - E_{\boldsymbol{p}} t)/\hbar} \tag{1.56}$$

と書くことができる．

$E = -E_{\boldsymbol{p}} < 0$ の場合も (1.56) で $E_{\boldsymbol{p}}$ の符号を変えたものが解であるが，これと同等の形

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{x}, t) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}c}{E - mc^2} \chi' \\ \chi' \end{pmatrix} e^{i(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - Et)/\hbar} \\ &= \begin{pmatrix} -\dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}c}{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \chi' \\ \chi' \end{pmatrix} e^{i(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} + E_{\boldsymbol{p}} t)/\hbar} \end{aligned} \tag{1.57}$$

（$\chi'$ は任意）に書いておいた方が後ほど便利である．

## 1.4 ディラック粒子のスピン

ディラック粒子はスピン 1/2 を持っており，その自由度は (1.55) の $\chi$ に対応している．これがスピン 1/2 の状態を表現するスピノルであると考えるのが自然である．スピノルに作用するスピン演算子は行列表示ではパウリ行列を用いて $\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ と書けるが，ディラックの 4 成分スピノルに対するスピン演算子は，のちに 3.3 節において確かめるように，（ディラック表示では）行列

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

を用いて $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\Sigma}$ と表される．静止系 $\boldsymbol{p} = 0$ では，$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 2 つがそれぞれスピンの $z$ 成分 $S_z = +\frac{1}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar$ の状態に対応する．

ここまでは非相対論的な場合と対応して受け入れやすいが，運動量が 0 でない状態に対しては簡単にはゆかない．これを具体的に見てもよいが，ここでは，

スピン演算子とハミルトニアン $H = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + mc^2\beta$ の交換関係式を求めてみよう．$[\boldsymbol{S}, H]$ において，可換でない要素は行列の部分だけである．具体的な表示を用い，$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ を使って，

$$[\Sigma_i, \alpha_j] = 2i\epsilon_{ijk}\alpha_k\ , \qquad [\Sigma_i, \beta] = 0 \tag{1.59}$$

を得る．これより

$$[S_i, H] = i\hbar c\epsilon_{ijk}\alpha_k\mathsf{p}_j = -i\hbar c\big(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{p}\big)_i \tag{1.60}$$

となる．ここで扱っているのは相互作用のない自由粒子なのに，スピンはハミルトニアンと同時対角化できず，運動の定数ではないことになる*8)．

次に軌道角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x}\times\mathbf{p}$ とハミルトニアンの交換関係式を求めよう．今度可換でないのは $\mathbf{p}$ と $\boldsymbol{x}$ の部分で，正準交換関係式 $[x_i, \mathsf{p}_j] = i\hbar$ を用いて

$$[S_i, H] = i\hbar c\big(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{p}\big)_i \tag{1.61}$$

が得られる．したがって軌道角運動量も保存量でない．しかし，**全角運動量** $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ は

$$[J_i, H] = 0 \tag{1.62}$$

をみたし，保存されることがわかる．これは，ディラック方程式において軌道角運動量とスピンが不可分の要素であることを示している．

上で見たようにスピンは一般に保存量でないが，量 $\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{p}$ を考えると

$$[\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{p}, H] = i\hbar c\epsilon_{ijk}\alpha_j\mathsf{p}_k\mathsf{p}_i = 0 \tag{1.63}$$

となる．したがって，解 (1.56) のうち $\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{p}$ の固有状態となっているものがあるはずである．この固有値を求めるには，まず

$$(\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{p})^2 = S_i\mathsf{p}_iS_j\mathsf{p}_j = \frac{\hbar^2}{4}\Sigma_i\Sigma_j\mathsf{p}_i\mathsf{p}_j \tag{1.64}$$

において，$\mathsf{p}_i\mathsf{p}_j = \mathsf{p}_j\mathsf{p}_i$ に注意すると $\Sigma_i\Sigma_j$ を

$$\frac{1}{2}(\Sigma_i\Sigma_j + \Sigma_j\Sigma_i) = \delta_{ij} \tag{1.65}$$

に置き換えてよいので

$$(\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{p})^2 = \frac{\hbar^2}{4}\mathbf{p}^2 \tag{1.66}$$

となる．これより $\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{p}$ の固有値は $\pm\frac{1}{2}\hbar|\boldsymbol{p}|$ であることがわかる．よって固有関数は，$\chi$ として

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi_\pm = \pm|\boldsymbol{p}|\chi_\pm \tag{1.67}$$

---

*8) 運動量 0 の固有状態に対しては（つまり静止系では）$[\boldsymbol{S}, H] = 0$ となり例外である．

となるような $\chi_\pm$ を選んでくればよい．$\boldsymbol{p}$ の方向を極座標

$$\boldsymbol{p} = (p\sin\theta\cos\varphi, p\sin\theta\sin\varphi, p\cos\theta) \tag{1.68}$$

で表すと，このような $\chi_\pm$ は（位相を適当に選んで）

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \tag{1.69}$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

で与えられる．このとき 4 成分スピノル (1.55) は

$$u_\pm(\boldsymbol{p}, E_{\boldsymbol{p}}) = N \begin{pmatrix} \chi_\pm \\ \pm\dfrac{pc}{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2}\chi_\pm \end{pmatrix}, \tag{1.71}$$

$(p = |\boldsymbol{p}|)$ と書ける．$N$ は規格化定数．この定め方については第 5 章で議論する．

以上からわかるように，量 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ は保存量となる．この量は運動量方向のスピンの成分と解釈できる．

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}| = \lambda\hbar \tag{1.72}$$

と書いたとき，$\lambda$ をヘリシティと呼ぶ．ディラック粒子に対しては，$\lambda = \pm\frac{1}{2}$ の値をとる*9)．

## 1.5 電磁場中の粒子のディラック方程式

非相対論的量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.73}$$

においては，ポテンシャルエネルギー $V$ は問題に応じてさまざまな形をとりうるが，相対論的な場合はどうであろうか．例えば水素原子の問題であれば，ポテンシャルエネルギーはクーロンエネルギー

$$V(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}|} \tag{1.74}$$

である．これは言うまでもなく原点に静止している原子核（非常に重いとして）の生む電場によるものである．この座標系に対して一定速度で運動する系では，原子核は静止していないので，運動方程式の形は当然異なってくる．しかし，このようにポテンシャルエネルギーが静電場から来る場合には，これを一般的な

*9) $\pm\frac{1}{2}$ の代わりに $2\lambda = \pm 1$ を用いるときもある．

電磁場の特別な場合ととらえることにより，相対論的な場合への手がかりが得られる．クーロン力によるポテンシャルエネルギーは，一般に粒子（電子）の電荷 $-e$ とスカラーポテンシャル $\phi$ を用いて

$$V(\boldsymbol{x},t) = -e\phi(\boldsymbol{x},t) \tag{1.75}$$

と書くことができるが，より一般的に，外部から与えた電磁場中の（電荷 $-e$ の）荷電粒子のハミルトニアンは，スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ により

$$H = \frac{1}{2m}\big(\mathbf{p} + e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\big)^2 - e\phi(\boldsymbol{x},t) \tag{1.76}$$

という形をとる．スカラーポテンシャルの項を移項すると，

$$H + e\phi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2m}\big(\mathbf{p} + e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\big)^2 \tag{1.77}$$

となるが，これは非相対論的な分散関係式 (1.5) において，エネルギー，運動量をそれぞれ

$$E \to E + e\phi\,, \qquad \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A} \tag{1.78}$$

で置き換えたものに対応している．これらが 4 次元ベクトルの置き換え

$$p^\mu \to p^\mu + eA^\mu\,, \qquad A^\mu = (\phi/c, \boldsymbol{A}) \tag{1.79}$$

にまとまることは，電磁気が本来特殊相対論と相性がよいことの現れである．

このことから，ディラック方程式についても同様の置き換えを行うことにより電磁場中のディラック方程式が求められるであろう．その結果は (1.24) において，$H$ を

$$H = c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A}) + \beta mc^2 - e\phi \tag{1.80}$$

で置き換えることになる．

こうして得られた電磁場中の電子のディラック方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \Big[c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\big(-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A}\big) + \beta mc^2 - e\phi\Big]\psi \tag{1.81}$$

を調べてみる．非相対論的量子力学との対応を見るため，まず $\psi$ を上下 2 成分ずつに分け，さらに静止質量エネルギーに相当する位相を分離する．

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \begin{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{x},t)\\ \zeta(\boldsymbol{x},t)\end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar} \tag{1.82}$$

これを用いて (1.81) を書き直すと

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -e\phi\varphi + c\boldsymbol{\sigma}\cdot\big(-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A}\big)\zeta, \tag{1.83}$$

$$i\hbar\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -(2mc^2 + e\phi)\zeta + c\boldsymbol{\sigma}\cdot\big(-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A}\big)\varphi. \tag{1.84}$$

自由粒子の静止系では $\zeta = 0$ であったことを思い出すと，非相対論的極限で $\zeta$ は $\varphi$ よりはるかに小さいと予想されるので，(1.84) の $\zeta$ を含む項で静止エネルギーのみを残すと，

$$\zeta \simeq \frac{1}{2mc^2}\, c\boldsymbol{\sigma}\cdot\big(-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A}\big)\varphi \tag{1.85}$$

と近似でき，これを (1.83) に代入すると

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left\{\frac{1}{2m}\big[\boldsymbol{\sigma}\cdot(-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A})\big]^2 - e\phi\right\}\varphi \tag{1.86}$$

が得られる．ここで，一般に（空間）ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対し

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{V})^2 &= \boldsymbol{V}^2 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V})\\ &= \boldsymbol{V}^2 + i\epsilon_{ijk}\sigma_i V_j V_k\end{aligned} \tag{1.87}$$

が成立する*10) ことを用いて整理すると

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\big(-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A}\big)^2 + \frac{\hbar e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} - e\phi\right]\varphi \tag{1.88}$$

が得られる．これは電磁場中の荷電粒子の非相対論的シュレーディンガー方程式であるが，磁場 $\boldsymbol{B}$ を含む項が加わっている．この項は，電子が磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma} = -\frac{e}{m}\boldsymbol{S} \tag{1.89}$$

を持っていることを示している．一般に，スピン 1/2 の粒子の磁気モーメントはそのスピンに比例し，その質量を $m$，電荷を $q$ として

$$\boldsymbol{\mu} = g\,\frac{q}{2m}\boldsymbol{S} \tag{1.90}$$

と書いたとき，$g$ を**回転磁気比**と呼ぶが，上の結果から電子の回転磁気比が $g = 2$ であることがわかる*11)．非相対論的量子力学では，$g$ は実験によって決めるべき量であるが，ディラック方程式からはこれが理論的に導出されるのである．

*10) $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}$ は 0 になると錯覚しやすいが，$\boldsymbol{V}$ の成分同士が可換でない場合はそうならない．より一般的な公式として

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{U})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})$$

が成り立つ．

*11) より正確には，電子と電磁場の相互作用の高次効果により，$g$ は 2 から千分の一ほどずれる．この効果は量子電気力学により計算でき，理論と実験が 10 桁ほどの精度で一致している．これは自然法則の中でもっとも精密に検証されているものである．

## 1.6 非相対論的領域における相対論的補正

前節では電磁場中のディラック方程式から非相対論的な 2 成分スピノルに対する方程式を導いた．ここではこれに対して高次の相対論的補正を系統的に求める方法を紹介する．なお，第 3 章以降を読むには，本章のこれ以下と第 2 章はスキップしても差し支えない．

ディラック方程式から非相対論的な解釈が容易な 2 成分の方程式を導くには，4 成分スピノルに対するディラック方程式の上 2 成分が正エネルギーの解を記述するようにうまく分離できればよい．すなわち，4 成分のスピノル空間を 2 次元の部分空間に分けたときに，ハミルトニアンに上下 2 次元を結ぶ非対角な項がないようにできればよい．この方法はフォルディとヴォートホイゼン，および谷によって提案されたもので**フォルディ・ヴォートホイゼン変換**，あるいは**フォルディ・ヴォートホイゼン・谷変換**と呼ばれる．

ディラック方程式 (1.81) を

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi = \left[mc^2\beta + c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} - e\phi\right]\psi \tag{1.91}$$

と書く．$\boldsymbol{\pi}$ は

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + e\boldsymbol{A} = -i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A} \tag{1.92}$$

で与えられる．

$\psi$ を対角化するユニタリ変換を

$$\psi' = U\psi \tag{1.93}$$

と書くと，$\psi'$ に対する方程式は

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\big(U\psi\big) = Ui\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi + i\hbar\frac{\partial U}{\partial t}\psi \\ &= UH\psi + i\hbar\frac{\partial U}{\partial t}\psi \\ &= \left(UHU^{-1} + i\hbar\frac{\partial U}{\partial t}U^{-1}\right)U\psi \end{aligned} \tag{1.94}$$

となるので，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' = H'\psi' , \tag{1.95}$$

$$H' = UHU^{-1} + i\hbar\frac{\partial U}{\partial t}U^{-1} \tag{1.96}$$

と書くことができる．ユニタリ演算子 $U$ は，エルミート演算子 $T$ を用いて

$$U = e^{iT} \tag{1.97}$$

と書け，ハミルトニアンは

$$H' = e^{iT} H e^{-iT} + i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} e^{iT}\right) e^{-iT} \tag{1.98}$$

となる．これを展開すると，記法

$$\pounds_X Y = [X, Y] \tag{1.99}$$

を用いて，

$$\begin{aligned} H' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \big(\pounds_T\big)^k H + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \big(\pounds_T\big)^{k-1} \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= H + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \big(\pounds_T\big)^{k-1} \left(\pounds_T H + i\hbar \frac{\partial T}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{1.100}$$

と表すことができる．これは

$$H' = \sum_{k=0}^{\infty} H'_k \ , \tag{1.101a}$$

$$H'_0 = H \ , \tag{1.101b}$$

$$H'_1 = i\left(\pounds_T H + i\hbar \frac{\partial T}{\partial t}\right) , \tag{1.101c}$$

$$H'_k = \frac{i}{k} \pounds_T H'_{k-1} \qquad (k \geq 2) \tag{1.101d}$$

とも書ける．

　これを示すには，まず，

$$f(\lambda) = e^{i\lambda T} H e^{-i\lambda T}$$

を定義する．$\lambda = 0$ でのテイラー展開は一般に

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{d^k f}{d\lambda^k}(\lambda = 0)$$

と書けるので，まず $df/d\lambda$ を求めてみると

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= e^{i\lambda T} iTH\, e^{-i\lambda T} + e^{i\lambda T} H(-iT) e^{-i\lambda T} \\ &= e^{i\lambda T} i[T, H]\, e^{-i\lambda T} \\ &= e^{i\lambda T} i\pounds_T H\, e^{-i\lambda T} \end{aligned}$$

と表すことができ，これをくり返すと

$$\frac{d^k f}{d\lambda^k} = e^{i\lambda T} \big(i\pounds_T\big)^k H\, e^{-i\lambda T}$$

となることはすぐにわかる．$\lambda = 0$ での微分の値

$$\frac{d^k f}{d\lambda^k}(\lambda = 0) = \big(i\pounds_T\big)^k H$$

を用いて，

$$e^{iT}He^{-iT} = f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}\big(\pounds_T\big)^k H$$

が結論される．次に，

$$g(\lambda) = \left(\frac{\partial}{\partial t}e^{i\lambda T}\right)e^{-i\lambda T}$$

を考えると

$$\begin{aligned}\frac{dg}{d\lambda} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}e^{i\lambda T}iT\right)e^{-i\lambda T} + \left(\frac{\partial}{\partial t}e^{i\lambda T}\right)(-iT)e^{-i\lambda T} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}e^{i\lambda T}\right)iTe^{-i\lambda T} + e^{i\lambda T}i\frac{\partial T}{\partial t}e^{-i\lambda T} + \left(\frac{\partial}{\partial t}e^{i\lambda T}\right)(-iT)e^{-i\lambda T} \\ &= e^{i\lambda T}i\frac{\partial T}{\partial t}\,e^{-i\lambda T}\end{aligned}$$

であるから，これが $f(\lambda)$ で $H$ を $i\partial T/\partial t$ で置き換えたものになっていることに注意すると

$$\frac{d^k g}{d\lambda^k} = e^{i\lambda T}\big(i\pounds_T\big)^{k-1}i\frac{\partial T}{\partial t}\,e^{-i\lambda T}$$

が得られ，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{iT}\right)e^{-iT} = g(1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\big(\pounds_T\big)^{k-1}\frac{\partial T}{\partial t}$$

が成り立つ．これらを用いて上の展開式が示される．

さて，非相対論的な領域ではハミルトニアン $H$ の主要項は $mc^2\beta$ である．これと比較すると，運動量の項 $c\mathbf{p}$ はおよそ $pc/mc^2 \sim v/c$ の大きさの量とみなすことができる．また，ポテンシャルエネルギーの項 $-e\phi$ の大きさは，不確定性関係あるいはヴィリアル定理から，運動エネルギーと釣り合っている必要があるので，$\mathcal{O}\big((v/c)^2\big)$ 程度となる．ベクトルポテンシャルも $e\boldsymbol{A}$ がせいぜい同じ程度の大きさとする．電磁場の空間，時間的変化は電子の質量で決まるスケール $\hbar/mc$, $\hbar/m$ と比べて十分小さくないと非相対論的な描像が成り立たないので，微分は $v/c$ の量とみなすと，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ は $(v/c)^3$ の量となる．以下では，これらを念頭において，主要項に対し $(v/c)^4$ の大きさの項までの展開を求めることとする．

これから行う操作は，4 行 4 列のハミルトニアン $H$ を 2 行 2 列の部分行列のブロック 4 つからなる行列とみなしたとき，ブロック非対角な部分を消すように変換することが目標である．$H$ のうち，主要項 $mc^2\beta$ と $-e\phi$ はブロック対角，$c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}$ は非対角なので，$T$ をうまく選んで

$$i[T, \beta mc^2] = -c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} \tag{1.102}$$

となるようにできれば，この項を消すことができる．これには，$\alpha_i$ と $\beta$ が反可換かつ $\beta^2 = 1$ なので，

$$[\beta\boldsymbol{\alpha}, \beta] = \beta\boldsymbol{\alpha}\beta - \beta\beta\boldsymbol{\alpha} = -\beta\beta\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} = -2\boldsymbol{\alpha} \tag{1.103}$$

が成り立つことに着目して

$$iT = \tfrac{1}{2}\beta\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}c}{mc^2} = \frac{1}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} \tag{1.104}$$

と選べばよいことがわかる．これを用いて (1.101) の各項を順次求める．まず

$$\begin{aligned} H_1' &= i[T, H] - \hbar\frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2mc}[\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, mc^2\beta + c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} - e\phi] + \frac{i\hbar}{2mc}\frac{\partial}{\partial t}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} \end{aligned} \tag{1.105}$$

であるが，

$$[\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, \beta] = [\beta\alpha_i, \beta]\pi_i = -2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}\ , \tag{1.106}$$

$$[\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}] = \beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} = 2\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2\ , \tag{1.107}$$

$$[\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, \phi] = \beta\alpha_i[-i\hbar\nabla_i, \phi] = -i\hbar\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathrm{grad}\,\phi\ , \tag{1.108}$$

さらに $\boldsymbol{\pi}$ のうち $t$ に依存するのは $e\boldsymbol{A}$ だけであることを用いて，

$$H_1' = -c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{m}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{ie\hbar}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathrm{grad}\,\phi + \frac{ie\hbar}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1.109}$$

となる．最後の 2 項は

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1.110}$$

を用いてまとめることができ，

$$H_1' = -c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{m}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{ie\hbar}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E} \tag{1.111}$$

がまず得られる．

これを用いて展開の次の項

$$H_2' = \frac{i}{2}[T, H_1'] = \frac{1}{4mc}[\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, H_1'] \tag{1.112}$$

を計算すると，

$$H_2' = -\frac{1}{2m}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{2m^2c}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 + \frac{ie\hbar}{8m^2c^2}[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}] \tag{1.113}$$

となる．さらに展開の 3 次の項

$$H_3' = \frac{i}{3}[T, H_2'] = \frac{1}{6mc}[\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, H_2'] \tag{1.114}$$

は

$$H_3' = \frac{1}{6m^2c}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 - \frac{1}{6m^3c^2}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^4 + \frac{ie\hbar}{48m^3c^3}[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi},[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}]] \tag{1.115}$$

となるが，この最後の項はせいぜい $\mathcal{O}\big((v/c)^5\big)$ なので落とすことができる．展開の 4 次の項

$$H_4' = \frac{i}{4}[T, H_3'] = \frac{8}{6mc}[\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, H_3'] \tag{1.116}$$

を求めるには，$H_3'$ の第 1 項だけを残しておけばよく，

$$H_4' = \frac{1}{24m^3c^2}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^4 \tag{1.117}$$

である．これ以上の項からは $\mathcal{O}\big((v/c)^5\big)$ 以上の寄与しか現れないので，$H_0' = H$ から $H_4'$ までの各項を加えて，

$$\begin{aligned} H' \simeq\ & \underset{\text{D0}}{mc^2\beta} + \underset{\text{D2}}{\frac{1}{2m}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2} - \underset{\text{O3}}{\frac{1}{3m^2c}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^3} - \underset{\text{D4}}{\frac{1}{8m^3c^2}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^4} \\ & \underset{\text{D2}}{- e\phi} - \underset{\text{O3}}{\frac{ie\hbar}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}} + \underset{\text{D4}}{\frac{ie\hbar}{8m^2c^2}[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}]} \end{aligned} \tag{1.118}$$

が得られる．ここで，各項の下の記号は，D が対角，O が非対角を表し，数字は $v/c$ の次数である．

この表式は期待したように $c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}$ の項は消えているが，新たに高次の非対角項（$\boldsymbol{\alpha}$ の奇数次の項）が $v/c$ の 3 次に現れている．これを消すために 2 回目の変換

$$H'' = e^{iT'}H'e^{-iT'} + i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{iT'}\right)e^{-iT'} \tag{1.119}$$

を行う．$H'$ の非対角項を用いて

$$T' = -\frac{i}{2mc^2}\beta\left[-\frac{1}{2m^2c}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 - \frac{ie\hbar}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}\right] \tag{1.120}$$

と選ぶ．$H''$ の展開は 1 次の項まで求めればよく，

$$i[T', H'] = \frac{1}{3m^2c}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 + \frac{ie\hbar}{2mc}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}\,, \tag{1.121}$$

$$-\hbar\frac{\partial T'}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{6m^3c^3}\beta\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 + \frac{e\hbar^2}{4m^2c^3}\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.122}$$

を用いて，

$$H'' \simeq \underset{\text{D0}}{mc^2\beta} + \underset{\text{D2}}{\frac{1}{2m}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2} - \underset{\text{D4}}{\frac{1}{8m^3c^2}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^4} - \underset{\text{D2}}{e\phi}$$

$$+ \underset{\text{D4}}{\frac{ie\hbar}{8m^2c^2}[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}]} - \underset{\text{O4}}{\frac{i\hbar}{6m^3c^3}\beta\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^3} + \underset{\text{O4}}{\frac{e\hbar^2}{4m^2c^3}\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}} \tag{1.123}$$

この最後の 2 項はブロック非対角で $v/c$ の 4 次以上である．この項は 3 回目の変換により同様に消すことができ，$\mathcal{O}\bigl((v/c)^4\bigr)$ まででブロック対角なハミルトニアン

$$\begin{aligned} H''' \simeq\; & mc^2\beta + \frac{1}{2m}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{8m^3c^2}\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^4 - e\phi \\ & + \frac{ie\hbar}{8m^2c^2}[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}] \end{aligned} \tag{1.124}$$

を得る．

この表式をもう少し具体的に書き直すため，関係

$$\alpha_i\alpha_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \tag{1.125}$$

を用いる．まず

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 = (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\Sigma_k)\pi_i\pi_j = \boldsymbol{\pi}^2 + \tfrac{1}{2}i\epsilon_{ijk}\Sigma_k[\pi_i, \pi_j] \tag{1.126}$$

であるが,

$$\begin{aligned} [\pi_i, \pi_j] &= [-i\hbar\nabla_i, eA_j] + [eA_i, -ie\hbar\nabla_j] \\ &= -ie\hbar(\nabla_i A_j - \nabla_j A_i) \\ &= -ie\hbar\epsilon_{ijk}B_k \end{aligned} \tag{1.127}$$

により

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 = \boldsymbol{\pi}^2 + e\hbar\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.128}$$

と表せる*12)．次に，$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^4$ の項も同様にできるが，$\mathcal{O}\bigl((v/c)^4\bigr)$ で残るのは $\boldsymbol{\pi}$ のうち $\mathbf{p}$ のみなので $(\mathbf{p}^2)^2$ となる．最後の項は，$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E})$ から，

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}] &= \boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\pi} + i\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E}) - i\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) \\ &= -i\hbar\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{\Sigma}\cdot(-i\hbar)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} - 2i\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) \end{aligned} \tag{1.129}$$

である．この第 3 項では $\boldsymbol{\pi}$ は $\mathbf{p}$ のみを残せばよい．これらをまとめて最終的に

*12)　$\epsilon_{ijk}$ に関する重要公式 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta k\ell$ から，$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$ である．

$$H''' \simeq mc^2\beta + \frac{1}{2m}\beta(\mathbf{p}+e\boldsymbol{A})^2 - \frac{1}{8m^3c^2}\beta\mathbf{p}^4 - e\phi + \frac{e\hbar}{2m}\beta\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{B}$$
$$+ \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \frac{ie\hbar^2}{8m^2c^2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\boldsymbol{E}\times\mathbf{p}) \tag{1.130}$$

となる．見てわかるように $H'''$ はもちろんブロック対角な形となっている．上 2 行 2 列の部分のみ残すと，2 成分スピノルに対するハミルトニアンとして

$$H \simeq mc^2 + \frac{1}{2m}(\mathbf{p}+e\boldsymbol{A})^2 - \frac{1}{8m^3c^2}\mathbf{p}^4 - e\phi + \frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$$
$$+ \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \frac{ie\hbar^2}{8m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{E}\times\mathbf{p}) \tag{1.131}$$

が得られる．

$\mathcal{O}\big((v/c)^4\big)$ で新たに加わった（$1/c^2$ の係数を持つ）4 つの項の物理的意味を見ていくと，まず第 3 項は運動エネルギーに対する相対論的な補正項である．最後から 3 番目の項は，**ダーウィン項**と呼ばれ，静電場の場合には $-e\hbar^2/(8m^2c^2)\nabla^2\phi$ とも書くことができる．特にクーロン場の場合には，これは $\delta^3(\boldsymbol{x})$ に比例するので，軌道角運動量が 0 の状態（$S$ 状態）のエネルギーにのみ寄与する．

最後の 2 つの項は，両方併せてエルミートになる．静電場の場合には，$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0$ なので 2 つめの項のみが残り，特に中心力場に対しては

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\phi(r) = -\frac{\boldsymbol{x}}{r}\phi'(r) \tag{1.132}$$

であり，

$$\begin{aligned}\frac{e\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{E}\times\mathbf{p}) &= -\frac{e\hbar}{4m^2c^2}\,\frac{1}{r}\phi'(r)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{x}\times\mathbf{p})\\ &= -\frac{e\hbar}{4m^2c^2}\,\frac{1}{r}\phi'(r)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\\ &= -\frac{e}{2m^2c^2}\,\frac{1}{r}\phi'(r)\,\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}\end{aligned} \tag{1.133}$$

と，$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ 結合，つまり**スピン・軌道相互作用**を表すことがわかる．クーロン場の場合には，これは $1/r^3$ に比例する．

## 1.7 自由粒子ハミルトニアンの対角化

最後に，電磁場がない自由粒子の場合のブロック対角化変換を考えてみる．自由粒子に対しては，ディラック方程式の解が閉じた形で求められているので，それを基底にとれば近似なく対角化できることはすぐにわかる．しかし，スピノルの形を見ると，運動量の値によって異なる対角化行列が必要なこともわかる．そこで，運動量空間におけるハミルトニアン

$$H = c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + mc^2\beta \tag{1.134}$$

を対角化することを考える．$T$ として

$$T = -i\frac{\theta}{|\boldsymbol{p}|}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} \tag{1.135}$$

と仮定すると，

$$T^2 = -\frac{\theta^2}{\boldsymbol{p}^2}\beta\alpha_i\beta\alpha_j p_i p_j = +\theta^2 \tag{1.136}$$

となるため，

$$e^{iT} = \cos\theta + \beta\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\sin\theta \tag{1.137}$$

と閉じた形になり，

$$\begin{aligned} H' &= e^{iT}He^{-iT} \\ &= \left(\cos\theta + \beta\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\sin\theta\right)(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + mc^2\beta) \\ &\qquad \times\left(\cos\theta - \beta\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\sin\theta\right) \\ &= c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\left(\cos 2\theta - \frac{mc}{|\boldsymbol{p}|}\sin 2\theta\right) + mc^2\beta\left(\cos 2\theta + \frac{|\boldsymbol{p}|}{mc}\sin 2\theta\right) \end{aligned} \tag{1.138}$$

と整理できる．そこで，

$$\tan 2\theta = \frac{|\boldsymbol{p}|}{mc} \tag{1.139}$$

であるように $\theta$ を選ぶと $H'$ は対角にでき*13)，

$$H' = \sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4}\,\beta = \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{p}} & 0 \\ 0 & -E_{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} \tag{1.140}$$

という形をとる．

これを敢えて座標空間に戻すと

$$H' = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4}\,\beta \tag{1.141}$$

となり，解釈の難しい形となる．仮に微分が小さいとして展開すると，初項が質量エネルギー，第 2 項が非相対論的な運動エネルギーである展開式が得られるが，無限次までの微分が含まれる表式は必ずしも局所的とは限らず*14)，取

*13) $|\boldsymbol{p}|$ の小さい極限では $T$ は前節の $T$ (1.104) で $\boldsymbol{A} = 0$ としたものと一致することを注意しておく．また $T$ は時間によらないので時間微分の項はない．

*14) これは，有限の空間並進が

$$f(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\frac{d^kf}{dx^k}(x)$$

と，$x$ における関数とその無限次までの微分により書けることに注意すると想像できるであろう．

扱いが容易でない．実際，$H'$ が作用する波動関数 $\psi'(\boldsymbol{x})$ と，もとの波動関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ の関係を導いてみると，$\psi'(\boldsymbol{x})$ は同じ点 $\boldsymbol{x}$ における $\psi(\boldsymbol{x})$ だけによっては書けず，点 $\boldsymbol{x}$ の近傍（$\hbar/mc$ 程度の範囲内の）における $\psi$ の積分（ある意味の平均）の形になることがわかる．このことについてはこれ以上踏み込まないことにするが，関心のある方はフォルディ・ヴォートホイゼンの原論文[7] を参照されたい．

# 第 2 章
# 一体問題

この章では，いわゆるポテンシャル問題を扱う．まず，ポテンシャルが球対称な場合の一般論として，波動関数から角運動量に関係した部分を分離する．これは非相対論的な量子力学において，角度部分が球面調和関数で書かれるのと同様であるが，より複雑な手続きが必要である．

次に，具体的な問題として，ポテンシャルが $1/r$ に比例している場合を議論する．非相対論的な量子力学でも，解析的に解ける問題は調和振動子と水素原子ぐらいであるが，水素原子の問題は相対論的なディラック方程式においても厳密に解を求めることができる（！）．その解は，非相対論的な水素原子のスペクトルに加えて，軌道・スピン相互作用などに対応する準位の分裂を含んだ形となっている．

なお，この章は飛ばしても次章以下を読むには支障がない．

## 2.1　中心力場中のディラック粒子

ここでは，中心力ポテンシャルのある場合のディラック方程式の解の一般論を議論する．ポテンシャルはクーロンポテンシャルと同様に 4 ベクトルの時間成分の変換性を持つとする．エネルギー固有関数を $\psi(\boldsymbol{x})$ と書くと，これに対する方程式は

$$H\psi(\boldsymbol{x}) = \bigl(-i\hbar c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + mc^2\beta + V(r)\bigr)\psi(\boldsymbol{x}) = E\psi(\boldsymbol{x}) \tag{2.1}$$

となる．このハミルトニアンは回転対称性を持つ

$$[\boldsymbol{J}, H] = 0 \tag{2.2}$$

ため，エネルギー固有関数は角運動量の固有関数にとることができる．そこで，中心力ポテンシャル中のシュレーディンガー方程式で，波動関数を動径波動関数と球面調和関数の積に書いたように，「角度部分」を分離することを考える．

ただし，軌道角運動量およびスピン角運動量はハミルトニアンと可換でないので，全角運動量の固有関数を求める必要がある．

もう一つの対称性として，$\boldsymbol{x}$ の符号を逆にすることを考える．このとき，(2.1) のうち第 1 項だけ $\nabla \to -\nabla$ により符号が変わってしまう．ここで，左から $\beta$ をかけると，$\alpha_i$ は $\beta$ と反可換なので符号が元に戻る．したがって，

$$\psi'(\boldsymbol{x}) = \beta\psi(-\boldsymbol{x}) \tag{2.3}$$

と定義すると，$\psi(\boldsymbol{x})$ が解のとき $\psi'(\boldsymbol{x})$ も解となる．これをディラック方程式に対するパリティ変換 $P$ と呼ぶと，

$$[P, H] = 0 \tag{2.4}$$

が成り立つ．すなわち，ディラックスピノルに対しては，パリティ変換は空間座標を反転させる（以後軌道パリティと呼ぶことにする）とともに，行列 $\beta$ を作用させる（内部パリティ変換）の両方からなる．

さて，全角運動量の固有関数を導くため，まず 2 成分（パウリ）スピノルについて $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ の固有関数を求める．これは非相対論的量子力学で知られた角運動量の合成の問題である．軌道角運動量の大きさ $\boldsymbol{L}^2$ は $\boldsymbol{J}$ と可換（回転不変）なので，$\boldsymbol{J}^2$, $J_z$, $\boldsymbol{L}^2$ の同時固有状態が存在する（スピンの大きさは 1/2 で固定）．合成則より $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ であり

$$\big|j, j_z\big\rangle_\ell = \big(\ell\tfrac{1}{2}, j_z - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big|jj_z\big)\big|\ell, j_z - \tfrac{1}{2}\big\rangle\big|+\big\rangle + \big(\ell\tfrac{1}{2}, j_z + \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\big|jj_z\big)\big|\ell, j_z + \tfrac{1}{2}\big\rangle\big|-\big\rangle \tag{2.5}$$

と書ける．$(\ell s \ell_z s_z|jj_z)$ はクレブシュ－ゴルダン係数である．値を代入すると，$j = \ell + \frac{1}{2}$ の場合

$$\big|j, j_z\big\rangle_{\ell = j - \frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{j + j_z}{2j}}\,\big|j - \tfrac{1}{2}, j_z - \tfrac{1}{2}\big\rangle\big|+\big\rangle + \sqrt{\tfrac{j - j_z}{2j}}\,\big|j - \tfrac{1}{2}, j_z + \tfrac{1}{2}\big\rangle\big|-\big\rangle\,, \tag{2.6}$$

$j = \ell - \frac{1}{2}$ の場合

$$\big|j, j_z\big\rangle_{\ell = j + \frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{j - j_z + 1}{2(j+1)}}\big|j + \tfrac{1}{2}, j_z - \tfrac{1}{2}\big\rangle\big|+\big\rangle - \sqrt{\tfrac{j - j_z + 1}{2(j+1)}}\big|j + \tfrac{1}{2}, j_z + \tfrac{1}{2}\big\rangle\big|-\big\rangle \tag{2.7}$$

である*1)．これを 2 成分スピノルの形に書くと

---

*1) これらが正しい状態であることを確かめるには

$$\boldsymbol{J}^2 = (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S})^2 = \boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{S}^2 + L_+S_- + L_-S_+ + 2L_zS_z$$

を作用させて，実際に固有状態になっていることを見ればよい．($J_z$ の固有状態になっていることは見ただけでわかる.) ついでに書いておくと，非相対論的量子力学でよく知られているように，

$$L_\pm\big|\ell, \ell_z\big\rangle = \sqrt{(\ell \mp \ell_z)(\ell \pm \ell_z + 1)}\,\hbar\big|\ell, \ell_z \pm 1\big\rangle$$

である．(この関係が成り立つように，状態，つまり $Y_{\ell m}$ の相対位相を選んでいる.)

$$\chi^{(+)}_{jj_z} = \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+j_z}\, Y_{j-\frac{1}{2},j_z-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{j-j_z}\, Y_{j-\frac{1}{2},j_z+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

$$\chi^{(-)}_{jj_z} = \frac{1}{\sqrt{2(j+1)}} \begin{pmatrix} \sqrt{j-j_z+1}\, Y_{j+\frac{1}{2},j_z-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \\ -\sqrt{j+j_z+1}\, Y_{j+\frac{1}{2},j_z+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

となる．全角運動量 $j$ を持つ状態は，この 2 つとなるが，$j$ を固定したとき，(2.8) と (2.9) は，含まれる $\ell$ が 1 だけ異なるので，$\boldsymbol{x}$ を $-\boldsymbol{x}$ に置き換えると片方は符号が変わり，もう一方は変化しない，つまり（軌道部分の）パリティが逆であることに注意する．

ここで，2 行 2 列の行列

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

を考える．この行列は 2 乗すると 1 であることがすぐに確かめられ，またエルミートかつユニタリである．また,（軌道とスピンを含めた）回転のもとでスカラーであり，さらに，パリティ変換（$\boldsymbol{x}\to-\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\sigma}\to+\boldsymbol{\sigma}$）により符号を変える．これらの事実から，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}/r$ を $\chi^{(\pm)}_{jj_z}$ に作用させると，全角運動量は変わらず，パリティが逆の状態になるはずであるから，位相を除いて $\chi^{(\mp)}_{jj_z}$ になる以外にない．具体的に計算すると，この位相は 1 であることがわかるので，

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\chi^{(+)}_{jj_z} = \chi^{(-)}_{jj_z}\,, \qquad \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\chi^{(-)}_{jj_z} = \chi^{(+)}_{jj_z}\,, \tag{2.11}$$

が成り立つ．

以上は 2 成分スピノルの考察であるが，これを用いて 4 成分ディラックスピノルで決まった全角運動量の値を持つものを作ろう．ディラックスピノルに対する全角運動量は（ディラック表示で）

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \tfrac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L} + \tfrac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

と書けるので，上下各 2 成分に対して上の 2 成分スピノルを用いればよいことがわかるが，さらにパリティ変換で作用する行列 $\beta$ が

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

という形をしているので，$[p, H] = 0$ より上下の 2 成分は逆の（軌道部分の）パリティを持っている必要がある．したがって，全角運動量とその $z$ 成分が $j$, $j_z$ で与えられる状態に対応するディラックスピノルは

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} F(r)\chi^{(+)}_{jj_z}(\theta,\varphi) \\ iG(r)\chi^{(-)}_{jj_z}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} F(r)\chi^{(+)}_{jj_z}(\theta,\varphi) \\ iG(r)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\chi^{(+)}_{jj_z}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$(P=(-1)^{j-\frac{1}{2}})$ または

$$\psi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}F(r)\chi^{(-)}_{jj_z}(\theta,\varphi)\\ iG(r)\chi^{(+)}_{jj_z}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}F(r)\chi^{(-)}_{jj_z}(\theta,\varphi)\\ iG(r)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\chi^{(-)}_{jj_z}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}\tag{2.15}$$

$(P=(-1)^{j+\frac{1}{2}})$ という形をしていることがわかる．動径波動関数 $F(r)$ と $G(r)$ は角運動量からは何の関係も要求されず，この段階では独立な関数でよい．

角度とスピン部分の波動関数の形がわかったので，このスピノル

$$\psi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}F(r)\chi^{(\pm)}_{jj_z}(\theta,\varphi)\\ iG(r)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\chi^{(\pm)}_{jj_z}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}\tag{2.16}$$

をディラック方程式 (2.1) に代入すると，

$$\begin{aligned}(H-E)\psi(\boldsymbol{x})&=\begin{pmatrix}mc^2+V(r)-E & -i\hbar c\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\\ -i\hbar c\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla & -mc^2+V(r)-E\end{pmatrix}\\ &\quad\times\frac{1}{r}\begin{pmatrix}F(r)\chi^{(\pm)}_{jj_z}(\theta,\varphi)\\ iG(r)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\chi^{(\pm)}_{jj_z}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}=0\end{aligned}\tag{2.17}$$

となる．ここで，$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})$ という積が現れる．これを関係式 $\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ を用いて整理すると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})&=\sigma_i\sigma_j\nabla_i x_j\\ &=\nabla\cdot\boldsymbol{x}+i\sigma\cdot(\nabla\times\boldsymbol{x})\\ &=3+\boldsymbol{x}\cdot\nabla+i\sigma\cdot(\nabla\times\boldsymbol{x})\end{aligned}\tag{2.18}$$

となる．この第 2 項は，極座標を用いると $\boldsymbol{x}\cdot\nabla=r\frac{\partial}{\partial r}$ と表せる．このことを理解するには，$\frac{\boldsymbol{x}}{r}\cdot(\nabla f(\boldsymbol{x}))$ がベクトル場 $\nabla f$ の $\boldsymbol{x}/r$ 方向，すなわち動径方向への射影になっているので，$\frac{\partial f}{\partial r}$ と書けるはずであると考えれば納得できるであろう[*2)]．また，第 3 項の $\nabla\times\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{x}/i\hbar=\boldsymbol{L}/i\hbar$ と書けるので

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})=3+r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\hbar}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}\tag{2.19}$$

---

*2) 直接示すには，まず 2 次元極座標 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ で $(x,y)$ から $(\rho,\varphi)$ に変数変換すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_y\frac{\partial}{\partial\rho}+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_y\frac{\partial}{\partial\varphi}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_x\frac{\partial}{\partial\rho}+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_x\frac{\partial}{\partial\varphi}=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

より

$$x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}$$

が示せるので，さらに $(\rho,z)$ から $\rho=r\sin\theta$. $z=r\cos\theta$ により $(r,\theta)$ に変数変換すれば求める式が得られる．

と表せ，動径座標に作用する部分と，角度・スピン部分に作用する部分の和にうまく分かれる．さらにこの第 3 項は，

$$\frac{1}{\hbar}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\hbar^2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{1}{\hbar^2}\big[(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S})^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2\big] = \frac{1}{\hbar^2}\big(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2\big)$$
$$= j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \tag{2.20}$$

と書ける．これを計算すると $\chi^{(+)}_{jj_z}$ $(j=\ell+\frac{1}{2})$ に対し $j-\frac{1}{2}$, $\chi^{(-)}_{jj_z}$ $(j=\ell-\frac{1}{2})$ に対し $-j-\frac{3}{2}$ となる．この 2 つをまとめて $\pm(j+\frac{1}{2})-1$ と表せる．これらの関係より，(2.17) の上 2 成分

$$\big(mc^2+V(r)-E\big)\frac{F(r)}{r}\chi^{(\pm)}_{jj_z} + \hbar c\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\,\frac{G(r)}{r}\chi^{(\pm)}_{jj_z} = 0 \tag{2.21}$$

から，動径波動関数に対する方程式

$$\big(mc^2+V(r)-E\big)F(r) + \hbar c\left(\frac{dG(r)}{dr} \pm (j+\tfrac{1}{2})\frac{G(r)}{r}\right) = 0 \tag{2.22}$$

が得られる．方程式 (2.17) の下 2 成分

$$-i\hbar c\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\,\frac{F(r)}{r}\chi^{(\pm)}_{jj_z} + \big(-mc^2+V(r)-E\big)\frac{iG(r)}{r}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\chi^{(\pm)}_{jj_z} = 0 \tag{2.23}$$

は，$1=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}/r)^2$ を $\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla$ の後に挿入すれば

$$-i\hbar c\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}}{r}\,\frac{F(r)}{r}\chi^{(\mp)}_{jj_z} + \big(-mc^2+V(r)-E\big)\frac{iG(r)}{r}\chi^{(\mp)}_{jj_z} = 0 \tag{2.24}$$

と書き直せるので，上と同様に処理することができる．結果は

$$\hbar c\left(\frac{dF(r)}{dr} \mp (j+\tfrac{1}{2})\frac{F(r)}{r}\right) + \big(mc^2-V(r)+E\big)G(r) = 0 \tag{2.25}$$

となる．(2.22) と (2.25) の 2 式が動径波動関数 $F$, $G$ に対する連立方程式を与える．

本節ではポテンシャルがクーロン力と同様 4 ベクトルの時間成分として書ける場合（スピン 1，パリティ $-$ の粒子の交換による相互作用）を仮定したが，スピン 0，パリティ $+$ の粒子の交換による相互作用の場合は，質量と同様のスカラーなので，ハミルトニアンの $V(r)$ の項を $\beta V(r)$ に書き換えれば同様にできる．

## 2.2 クーロン場中のディラック粒子（水素原子）

座標の原点に電荷 $+e$ の点電荷があるとする．電子（電荷 $-e$）が位置 $\boldsymbol{x}$ にいるときのポテンシャルエネルギーは

$$V = -\frac{\alpha\hbar c}{r} \tag{2.26}$$

で与えられる．$\alpha$ は

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \tag{2.27}$$

で定義される無次元量で，その値はおよそ 1/137 である．この定数を**微細構造定数**と呼ぶ．以後，中心電荷が $+Ze$ であったとすると $\alpha$ を $Z\alpha$ で置き換えればよい．

動径波動関数に対する方程式は，(2.22), (2.25) より

$$\hbar c\frac{dF}{dr} \mp \left(j+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\hbar c}{r}F + \left(mc^2 + E + \frac{\alpha\hbar c}{r}\right)G = 0, \tag{2.28a}$$

$$\hbar c\frac{dG}{dr} \pm \left(j+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\hbar c}{r}G + \left(mc^2 - E - \frac{\alpha\hbar c}{r}\right)F = 0. \tag{2.28b}$$

ここで

$$\varepsilon_\pm = \sqrt{\frac{mc^2 \pm E}{\hbar c}} \tag{2.29}$$

と定義し，また上 2 成分が $\chi^{(\pm)}_{jj_z}$ の場合に対応して $\ell' = \pm(j+\frac{1}{2})$ と定義すると，

$$\frac{dF}{dr} - \frac{\ell'}{r}F + \left(\varepsilon_+^2 + \frac{\alpha}{r}\right)G = 0\,, \tag{2.30a}$$

$$\frac{dG}{dr} + \frac{\ell'}{r}G + \left(\varepsilon_-^2 - \frac{\alpha}{r}\right)F = 0 \tag{2.30b}$$

と書き直せる．$\ell'$ は $\pm1, \pm2, \ldots$ の値をとる．

まず，この方程式系の $r \to \infty$ でのふるまいを調べる．相対的に $\mathcal{O}(1/r)$ の項を無視すると

$$\frac{dF}{dr} + \varepsilon_+^2 G \simeq 0, \tag{2.31a}$$

$$\frac{dG}{dr} + \varepsilon_-^2 F \simeq 0 \tag{2.31b}$$

となる．$G$ を消去して

$$\frac{d^2F}{dr^2} \simeq \varepsilon_+^2\varepsilon_-^2 F \tag{2.32}$$

である．$|E| > mc^2$ では，$\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2 < 0$ で振動解となり，散乱状態を与える．逆に $|E| < mc^2$ では指数関数的なふるまいを示し，この場合は束縛状態が存在できる．以下ではこの場合に限ることにする．解は $F(r) \simeq e^{\pm\varepsilon_+\varepsilon_- r}$ となり，規格化可能な解は $-$ 符号の減衰解である．ただし，この形に $r$ のベキがかかった関数 $F(r) \simeq r^\gamma e^{-\varepsilon_+\varepsilon_- r}$ であっても，$\mathcal{O}(1/r)$ を無視しているので，同等に解として許される．また $G$ は $G \simeq -(1/\varepsilon_+^2)dF/dr$ により $F$ と関係がつく．まとめると $r \to \infty$ で，共通の定数倍を除いて

$$F(r) \simeq \varepsilon_+ r^\gamma e^{-\varepsilon_+ \varepsilon_- r}, \tag{2.33a}$$

$$G(r) \simeq \varepsilon_- r^\gamma e^{-\varepsilon_+ \varepsilon_- r} \tag{2.33b}$$

となる．

次に，原点付近のふるまいを調べる．今度は相対的に $\mathcal{O}(r)$ の項を無視して，

$$\frac{dF}{dr} - \frac{\ell'}{r}F + \frac{\alpha}{r}G \simeq 0\,, \tag{2.34a}$$

$$\frac{dG}{dr} + \frac{\ell'}{r}G - \frac{\alpha}{r}F \simeq 0 \tag{2.34b}$$

であるが，$r \to 0$ でのふるまいを

$$F \simeq f_0 r^\nu\,, \qquad G \simeq g_0 r^\nu \tag{2.35}$$

と仮定して（もし $F$ と $G$ で $r$ のベキが異なると，ベキの小さい方が 0 と結論されてしまうので等しい必要がある）方程式 (2.34) に代入すると

$$(\nu - \ell')f_0 + \alpha g_0 = 0\,, \tag{2.36a}$$

$$-\alpha f_0 + (\nu + \ell')g_0 = 0 \tag{2.36b}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \nu - \ell' & \alpha \\ -\alpha & \nu + \ell' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.37}$$

が得られる．この連立方程式が $f_0 = g_0 = 0$ 以外の解をもつためには，行列式が 0 であることが必要なので，$\nu^2 - \ell'^2 + \alpha^2 = 0$, すなわちベキの次数は $\nu = \pm\sqrt{\ell'^2 - \alpha^2}$ となるが，原点における規格化可能性から，正のベキが残る．

$$\nu = \sqrt{\ell'^2 - \alpha^2} = \sqrt{\left(j + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}. \tag{2.38}$$

このように，非相対論的な場合と異なり，ベキの次数が整数からずれていることに注意しておく．このとき，$f_0$ と $g_0$ は

$$g_0 = \frac{\alpha}{\nu + \ell'} f_0 = \frac{\ell' - \nu}{\alpha} f_0 \tag{2.39}$$

をみたす．

このように $r \to \infty$ と $r \to 0$ での関数のふるまいがわかったので，次の形を仮定する．

$$F(r) = e^{-\varepsilon_+ \varepsilon_- r} r^\nu (f_0 + f_1 r + \cdots) = e^{-\varepsilon_+ \varepsilon_- r} \sum_{i=0} f_i r^{\nu+i}, \tag{2.40a}$$

$$G(r) = e^{-\varepsilon_+ \varepsilon_- r} r^\nu (g_0 + g_1 r + \cdots) = e^{-\varepsilon_+ \varepsilon_- r} \sum_{i=0} g_i r^{\nu+i}. \tag{2.40b}$$

これを (2.30) に代入して整理する．$r$ の各次数の係数が 0 である必要があるので，$r^{\nu+i-1}$ 次の項の係数から

$$\begin{pmatrix} i+\nu-\ell' & \alpha \\ -\alpha & i+\nu+\ell' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_+\varepsilon_- & -\varepsilon_+^2 \\ -\varepsilon_-^2 & \varepsilon_+\varepsilon_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{i-1} \\ g_{i-1} \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

という係数間の漸化式が導かれる（練習問題）．ただし $i = 1, 2, \ldots$ である．$r^{\nu-1}$ 次の項の係数からは，(2.41) で $i = 0$ として右辺を 0 とおいた関係，つまり $r \to 0$ に対して求めたのと同じ関係が得られる．左辺の行列の逆行列を求めて左からかけると $f_i, g_i$ が $f_{i-1}, g_{i-1}$ から計算できる形になる．さらに右辺の行列は行列式が 0 であることを用いて書き直して，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix} &= \frac{1}{i(i+2\nu)}\begin{pmatrix} i+\nu+\ell' & -\alpha \\ \alpha & i+\nu-\ell' \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \varepsilon_+ \\ -\varepsilon_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_- & -\varepsilon_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{i-1} \\ g_{i-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\varepsilon_- f_{i-1} - \varepsilon_+ g_{i-1}}{i(i+2\nu)}\begin{pmatrix} i+\nu+\ell' & -\alpha \\ \alpha & i+\nu-\ell' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_+ \\ -\varepsilon_- \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.42}$$

と整理される．

仮にこの級数が無限に続いたとすると，$i$ が十分大きければ

$$f_i \simeq \frac{\varepsilon_+}{i}\left(\varepsilon_- f_{i-1} - \varepsilon_+ g_{i-1}\right), \tag{2.43a}$$

$$g_i \simeq \frac{\varepsilon_-}{i}\left(\varepsilon_- f_{i-1} - \varepsilon_+ g_{i-1}\right) \tag{2.43b}$$

が成り立つ．比を取って $f_i/g_i \simeq \varepsilon_+/\varepsilon_-$ は $f_{i-1}/g_{i-1}$ に対しても成り立つので，

$$f_i \simeq \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{i} f_{i-1} \tag{2.44}$$

が言え，これをくりかえすと

$$f_i \propto \frac{(2\varepsilon_+\varepsilon_-)^i}{i!} \tag{2.45}$$

となり，級数の和は $\sum f_i r^i \propto e^{2\varepsilon_+\varepsilon_- r}$ なので，結果的に $F(r) \propto e^{\varepsilon_+\varepsilon_- r}$ と，規格化できない解となってしまう．したがって，級数はどこかで切れることが必要である．

上の $r \to \infty$ のふるまいの議論から，$f_i$ と $g_i$ は同じ $i$ で切れなければならないので，$f_{n'+1} = g_{n'+1} = 0$ ($f_{n'}, g_{n'} \neq 0$) となると仮定する（$n' = 0, 1, \ldots$）．ところが，(2.42) の形から，このためには $\varepsilon_- f_{n'} - \varepsilon_+ g_{n'} = 0$ となることが必要である．これは，$r \to \infty$ を調べた結論 (2.33) と一致する．すなわち，

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_- & -\varepsilon_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n'} \\ g_{n'} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.46}$$

が成り立つことになる．$f_{n'}, g_{n'}$ を $f_{n'-1}, g_{n'-1}$ を用いて表すことにより，この条件は

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_- & -\varepsilon_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n'+\nu+\ell' & -\alpha \\ \alpha & n'+\nu-\ell' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_+ \\ -\varepsilon_- \end{pmatrix} = 0 \tag{2.47}$$

となり，これを具体的に計算すると

$$\alpha(\varepsilon_+^2 - \varepsilon_-^2) = 2(n'+\nu)\varepsilon_+\varepsilon_- \tag{2.48}$$

が得られる．これはエネルギー固有値を決める条件である．定義より $\varepsilon_+^2 - \varepsilon_-^2 = 2E/\hbar c$, $\varepsilon_+\varepsilon_- = \sqrt{m^2c^4 - E^2}/\hbar c$ を代入して $E$ について解くと

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{(n'+\nu)^2}}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\left(n'+\sqrt{(j+\frac{1}{2})^2-\alpha^2}\right)^2}}} \end{aligned} \tag{2.49}$$

と，閉じた形で固有値が与えられる*3)．ただし，$n'=0$ の場合は，$f_{-1}, g_{-1}$ が存在しないので上の方法は成立しない．この場合は，上の条件 $\varepsilon_- f_0 - \varepsilon_+ g_0 = 0$, つまり $f_0 : g_0 = \varepsilon_+ : \varepsilon_-$ と，$r \to 0$ で求めた条件 (2.37) が両立することが要請されるので，

$$\begin{pmatrix} \nu-\ell' & \alpha \\ -\alpha & \nu+\ell' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_+ \\ \varepsilon_- \end{pmatrix} = 0 \tag{2.50}$$

が成り立たなければならない．この式に左から $(\varepsilon_- \quad \varepsilon_+)$ をかけても成り立つのでこれを計算すると $\alpha(\varepsilon_+^2 - \varepsilon_-^2) = 2\nu\varepsilon_+\varepsilon_-$ が得られ，(2.48) 式で $n'=0$ とおいたものとちょうど等しくなっているので，上で求めたエネルギー固有値の表式は $n'=0$ についても適用できることがわかる．

基底状態は $n'=0, j=\frac{1}{2}$ で，エネルギー固有値は

$$E = mc^2\sqrt{1-\alpha^2} \tag{2.51}$$

となる．$\alpha > 1$ （あるいは $Z > 137$）では，平方根の中が負になり，この場合は振動解になってしまう．

次にくるのは $n'=1, j=\frac{1}{2}$,

$$E = mc^2\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}} \tag{2.52}$$

$n'=0, j=\frac{3}{2}$,

$$E = mc^2\sqrt{1-\alpha^2/4} \tag{2.53}$$

となる．

---

*3) このように，負エネルギーの束縛状態の解は出てこない．

エネルギー固有値の表式 (2.49) を $\alpha$ の 2 次まで展開すると,

$$E = mc^2 - \frac{\alpha^2 mc^2}{2\left(n' + j + \frac{1}{2}\right)^2} + \mathcal{O}(\alpha^4) \tag{2.54}$$

となり, $n = n' + j + \frac{1}{2}$ と定義すると, 第 2 項は非相対論的量子力学においてシュレーディンガー方程式を解いた結果 ($n$ が主量子数) と一致している. 実際,

$$\alpha^2 mc^2 = \frac{e^4 m}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} \tag{2.55}$$

であり*4), 光速 $c$ は姿を消す. このことからわかるように, $\alpha$ が 1 に比べて十分小さいことが, 水素原子の束縛エネルギーが電子の質量エネルギーよりはるかに小さいことを意味しており, これが水素原子の非相対論的な取り扱いの成功の隠された理由である.

$E$ を $\alpha^4$ まで展開すると,

$$\frac{E}{mc^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{1}{2n^4}\left(\frac{3}{4} - \frac{n}{j + \frac{1}{2}}\right)\alpha^4 \tag{2.56}$$

となり, 同じ $n$ に対しても, 全角運動量の大きさによりエネルギー固有値が変わってくる. この準位の分裂を, **微細構造** (fine structure) と呼ぶ. 電磁相互作用の強さを表す定数 $\alpha$ が微細構造定数と呼ばれるのは, 微細構造のエネルギー準位差にこの量が現れるためである.

ここで, 状態の縮退の状況を見てみよう. $n, j$ を固定したとき, 回転対称性の帰結である $j_z$ の異なる $2j+1$ 個の縮退は当然として, それ以外に $\ell'$ の符号 (解のパリティ) の縮退がある. これは, エネルギー固有値を決める条件 (2.47) が $\ell' = \pm(j + \frac{1}{2})$ の符号によらず同じ式 (2.48) を与えるためで, 各 $j$ に対してパリティが正負の両方の状態が縮退する. これらに対しては上 2 成分の軌道角運動量の大きさが $j \mp \frac{1}{2}$ となっている. ただし, $n' = 0$ の場合は例外で, $f_0$ と $g_0$ は同符号 ($f_0/g_0 = \varepsilon_+/\varepsilon_-$) なので, (2.39) と見比べると $\ell' > 0$ である必要があり, この縮退はない.

非相対論的近似ではさらに $n$ が等しい状態がすべて縮退する. $n'$ は 0 または正の整数, $j + \frac{1}{2}$ は正の整数なので, $n$ を固定すると $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n - \frac{1}{2}$ の $n$ 個の異なる $j$ が許される.

各状態を $nL_j$ (上 2 成分の $\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$ が $L = S, P, D, F, \ldots$ に対応) と表して縮退の状況をまとめると以下のようになる. 同じ $n$ の状態は $\mathcal{O}(\alpha^2)$ までで縮退, 括弧でくくった状態の組は厳密に縮退している.

*4) ガウス単位系なら $4\pi\varepsilon_0$ を 1 とおけばよい.

| $n$ | 状態 |
|---|---|
| 1 | $1S_{1/2}$ |
| 2 | $\left(2S_{1/2}, 2P_{1/2}\right) \quad 2P_{3/2}$ |
| 3 | $\left(3S_{1/2}, 3P_{1/2}\right) \quad \left(3P_{3/2}, 3D_{3/2}\right) \quad 3D_{5/2}$ |
| $\vdots$ | $\cdots$ |

今までの結果を用いて波動関数を具体的に求めることができるが，ここでは基底状態だけを示そう．$n'=0$, $\ell'=1$, $j=\frac{1}{2}$ に対し，$E=mc^2\sqrt{1-\alpha^2}$, $\nu=\sqrt{1-\alpha^2}$, $\varepsilon_+\varepsilon_-=\alpha mc/\hbar$ となり，$g_0/f_0=\alpha/\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)$, 角度部分の 2 成分スピノルは

$$\chi^{(+)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \chi^{(+)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{2.57a}$$

$$\chi^{(-)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix}, \qquad \chi^{(-)}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix}\sin\theta e^{-i\varphi}\\ -\cos\theta\end{pmatrix} \tag{2.57b}$$

と与えられるので，$j=j_z=1/2$ に対し，

$$\psi(\boldsymbol{x})=Nr^{-(1-\sqrt{1-\alpha^2})}e^{-\alpha mcr/\hbar}\begin{pmatrix}1\\0\\ \dfrac{i\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}\cos\theta\\ \dfrac{i\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}\sin\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix}, \tag{2.58}$$

$j=1/2$, $j_z=-1/2$ に対し，

$$\psi(\boldsymbol{x})=Nr^{-(1-\sqrt{1-\alpha^2})}e^{-\alpha mcr/\hbar}\begin{pmatrix}0\\1\\ \dfrac{i\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}\sin\theta e^{-i\varphi}\\ -\dfrac{i\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}\cos\theta\end{pmatrix}. \tag{2.59}$$

$N$ は規格化定数である．波動関数のひろがりを決めているのは指数関数の肩の部分で，これを $e^{-r/a_0}$ と書くと，量 $a_0$ は

$$a_0=\frac{\hbar}{\alpha mc}=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2m} \tag{2.60}$$

と，ボーア半径そのものである．これを

$$a_0=\frac{1}{\alpha}\frac{\hbar}{mc}=\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{\alpha} \tag{2.61}$$

と書くと，$\lambda\!\!\!^{-}=\hbar/mc$ は電子のコンプトン波長で，電子の持つ固有の長さのス

ケールであるが，水素原子の波動関数のひろがりはそれにくらべて 2 桁大きく，弱く束縛された状態と言うことができる．これは $\alpha$ が小さく，相互作用のポテンシャルエネルギーによって原点に電子が引き寄せられる効果が，不確定性関係による運動エネルギーのため電子が拡がる効果より弱いためである．

エネルギー固有値を $\alpha$ で展開すると $\alpha^2$ の各次数が現れたが，各項の大きさは 4 桁以上も異なっている．最低次の質量エネルギー $mc^2$ は，0.511 MeV という大きさを持つ．電子とその反粒子である陽電子が対消滅して 2 個の光子になると，それぞれの光子は重心系で電子の質量エネルギーと同じエネルギーを持つが，その波長は電子のコンプトン波長 $(2.5 \times 10^{-12}\ \mathrm{m})$ に等しく，ガンマ線の領域である．$\mathcal{O}(\alpha^2)$ の項は，よく知られた数字である基底状態の束縛エネルギー 13.6 eV により特徴づけられる．このエネルギーに対応する波長は 90 nm である．主量子数 $n$ の異なる状態間の遷移によって放出吸収される電磁波は典型的に紫外線から可視光，さらに赤外線の領域にあり，これらが量子力学の発見に重要な役割を果たしたことは言うまでもない．同じ $n$ で異なる $j$ の状態のエネルギー差は，$\mathcal{O}(\alpha^4)$ でありこれよりはるかに小さい．例えば，$n=2$ の $j=\frac{1}{2}$ と $j=\frac{3}{2}$ の状態のエネルギー差はおよそ $5 \times 10^{-5}$ eV で，対応する波長は 3 cm 程度，振動数にして 10 GHz 程度である．これは電波で，ラジオ，TV よりずっと波長が短く，無線 LAN などに使用されているよりもさらに短い領域である．$n$ が大きくなると波長はこれより長くなる．

この $\alpha$ による展開が非相対論的展開でもあることは，実際，$a_0$ を固定して $\alpha \to 0,\, c \to \infty$ の極限をとれば純粋に非相対論的な結果が得られることからもわかる．(波動関数も上 2 成分のみの非相対論的な波動関数に帰着することが見て取れる.）したがって，エネルギー固有値の $\mathcal{O}(\alpha^4)$ の項は，非相対論的極限に対する相対論的な補正ともみなすことができる．したがって，これは 1.6 節において導いた $\mathcal{O}\big((v/c)^4\big)$ の補正項に対応しているはずである．そこでこれらの補正項を摂動とみなして，非相対論的量子力学の枠組でエネルギー固有値の変化を計算することができる．この見方によると，同じ主量子数の状態の間に $J$ によってエネルギー固有値の差が生じるのは，$\mathcal{O}\big((v/c)^4\big)$ の $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ 相互作用項に起因する．また，同じ $J$ で $\ell$ が異なる状態が縮退するが，これは $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ 項に加え，運動エネルギーの相対論的補正項，ダーウィン項の寄与をすべて含めて得られる（この見方からは奇跡的な！）結果となる．

現実の水素原子では，今まで議論した以上に準位の分裂を引き起こす要因がある．そのうち 2 つについて触れよう．全角運動量 $J$ が等しくパリティが逆の状態の間の縮退は厳密に成り立っていたが，実験的にはわずかに差がある．特に $2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$ の間のエネルギー差は有名で，発見者の名前を取って**ラム・シフト**と呼ばれる．この差の大きさは，$2P_{1/2}$ と $2P_{3/2}$ の差より 1 桁小さい．ラム・シフトの主要な原因は，電磁場と電子の間のダイナミクスである．本節では，外場としてのクーロン場を固定してその中の電子の方程式を求めたが，実

際には電子も電磁場を作り，その効果を電子自身も受ける．この効果の大きさを第一原理から導出するためには，電子と電磁場の両方を量子場として扱う**量子電気力学** (QED, Quantum Electrodynamics) が必要で，さらにみかけの無限大をくりこみにより処理しなければならない．本書ではこれ以上は立ち入らないが，このようにして計算された結果は実験値とよく一致している．

もう一つは，原子核である陽子が磁気モーメントを持っていることによる効果で，**超微細構造** (hyperfine structure) と呼ばれる．陽子は，スピン 1/2 を持ち，回転磁気比にしておよそ 5.59 の磁気モーメントを持つ（これは電子の磁気モーメントより 3 桁小さい）．これと電子の磁気モーメント間の相互作用により，電子のスピンと陽子のスピンの向きによってエネルギー差が生じる．$1S$ 状態の合成スピン 1 と 0 の間のエネルギー差は，$2P$ の微細構造より 1 桁小さく，これに対応する波長は 21cm である．この準位間の遷移に伴って放出される電波は，宇宙空間の水素原子を電波望遠鏡で観測するのに用いられる．

# 第 3 章
# 相対論的共変性

本章では，ディラック方程式が真に相対論的な理論であるかどうか，すなわち，どの座標系でも同じ形を取るという相対性原理をみたしているかどうかを見る．この過程で，ローレンツ変換のもとでディラックスピノルがどのように形を変えるかが明らかとなる．さらに，ディラックスピノルから構成される量の変換性を調べる．ここで導入されるガンマ行列は，以下で重要な役割を果たす．

## 3.1 相対論との整合性

第 1 章では，相対論的な分散関係式 $E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4$ を導く波動方程式としてディラック方程式を導入した．だが，真に相対論的な理論とは，相対性原理をみたす理論である．相対性原理とは，物理法則が座標系（慣性系に限る）を区別しない，つまりいかなる座標系においても同じ形をとるということである．ディラック方程式が実際に相対性原理をみたす理論である（これをディラック方程式が相対論的に共変な理論であるという）かどうかは検証する必要がある．

相対論において，ある座標系と別の座標系の間の関係は，ローレンツ変換と呼ばれる．2 つの座標系を $x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$, $x'^\mu = (ct', \boldsymbol{x}')$ $(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ とすると*1)，一般のローレンツ変換は

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \tag{3.1}$$

と書ける．これが 1 次変換であるのは，双方の座標系において慣性の法則が成立することによる．第 2 項の $b^\mu$ は時空の原点のシフトに対応する．この部分は以下理論の共変性を調べる際には本質的な役割を果たさないので，以下では斉次ローレンツ変換

*1) 本書では基本的にギリシア文字 $(\mu,\ \nu,\ \rho,\ \sigma,\ \lambda,\ \ldots)$ の添字は $(0, 1, 2, 3)$, ラテン文字 $(i,\ j,\ k,\ \ldots)$ は $(1, 2, 3)$ を走るとする．

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{3.2}$$

を考える．光速度一定の原理をみたすためには，$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ は条件

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \tag{3.3}$$

をみたさなければならない．計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は，本書では

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

と符号を選ぶ．

この条件を具体的に見るために，

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu} \tag{3.5}$$

と書き，$|\epsilon^{\mu}{}_{\nu}| \ll 1$ の場合（微小変換）を考えると，ローレンツ変換の条件 (3.3) は

$$\epsilon_{\nu\mu} = -\epsilon_{\mu\nu} \tag{3.6}$$

と表される（ここで $\epsilon_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \epsilon^{\lambda}{}_{\nu}$ である.）従って独立な変換パラメータは 6 つ存在する．$\mu, \nu = 1, 2, 3$ の場合の変換は空間回転に相当し，$\mu, \nu$ の片方が 0 の場合はブースト（狭義のローレンツ変換）である．これらの変換はそれぞれ 3 つのパラメータを持つ．

斉次ローレンツ変換により，4 次元ベクトルは，$x^{\mu}$ と同様に変換する．例えば，エネルギー運動量ベクトル $p^{\mu} = (E/c, \boldsymbol{p})$ は

$$p^{\mu} \longrightarrow p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu} \tag{3.7}$$

と変換する．

時空上で定義されている関数 $f(x) = f(\boldsymbol{x}, t)$ があったとする．これを新しい座標系で見た関数を $f'(x')$ とすると，当然

$$f'(x') = f(x) \tag{3.8}$$

であるはずである．

電磁場のようにいくつかの成分を持つ関数の場合には，ローレンツ変換によって一般に異なる成分同士が混ざることが起こる．例えば，電場は 3 次元ベクトルであり，座標軸を回転するとその向きが変わる．これは回転により電場の各成分の間に混合が起こることを意味している．ローレンツ変換のもとでは，電磁ポテンシャル $A^{\mu} = (\phi/c, \boldsymbol{A})$ は

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(x) \tag{3.9}$$

と変換する[*2)]．電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は相対論的には 4 次元ベクトルでなく，2 階反対称テンソル $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$ の成分

$$F^{0i} = -\frac{1}{c} E_i \, , \qquad F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k \tag{3.10}$$

であり，

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} F^{\rho\sigma}(x) \tag{3.11}$$

という変換を受ける．相対論の基礎的な事項で本書において使われるものについては，付録 B に簡単にまとめておく．

## 3.2 ディラック方程式の共変形

まず，ディラック方程式を相対論的共変性が見やすい形に書き直す．(1.37) を移項したもの

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\boldsymbol{x}, t) + i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi(\boldsymbol{x}, t) - \beta m c^2 \psi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{3.12}$$

において，左から $\beta$ をかけ，$\beta^2 = 1$ を用いて

$$\left[ i\hbar \beta \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - m c^2 \right] \psi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{3.13}$$

を得る．ここで，

$$\gamma^0 = \beta \, , \qquad \gamma^i = \beta \alpha_i \tag{3.14}$$

と定義すると，(3.13) は

$$\left[ i\hbar \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc \right] \psi(x) = 0 \tag{3.15}$$

と書き直せる．

ここで定義した 4 つの**ガンマ行列** $\gamma^{\mu}$ の性質をいくつか挙げておく．これらは $\alpha_i, \beta$ の性質からすぐに導かれる．

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = g^{\mu\nu} \, , \tag{3.16a}$$

$$(\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0 \, , \qquad (\gamma^i)^{\dagger} = -\gamma^i \, . \tag{3.16b}$$

式 (3.16a) の右辺は，明示していないが単位行列に比例する．この式の具体的に意味するところは，

---

*2)　電磁ポテンシャルにはゲージ変換の不定性があるが，ここでは立ち入らない．

$$(\gamma^0)^2 = 1\,, \qquad (\gamma^i)^2 = -1\,,$$
$$\gamma^\nu\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^\nu \quad (\mu \neq \nu) \tag{3.17}$$

となる．下付きのガンマ行列を $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$ で定義すると，$\gamma_0 = \gamma^0$, $\gamma_i = -\gamma^i$ である．

$\gamma^\mu$ のディラック表示での具体的な形は

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \tag{3.18a}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.18b}$$

となる．

行列 $\boldsymbol{\alpha}$, $\beta$ に対するのと同様に，4 次の行列で関係 (3.16) をみたす行列の組は無数につくれるが，任意の 2 組 $\{\gamma^\mu\}$, $\{\gamma'^\mu\}$ は，ユニタリ行列 $U$ によって同値関係にあることが示せる．

$$\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}. \tag{3.19}$$

この証明は付録 D.1 節及び E.1 節に与えてある．

## 3.3 ディラック方程式が真に相対論的な理論であること

方程式 (3.15) の形はいかにも相対論的に共変な形をしているのではあるが，上で定義した行列 $\gamma^\mu$ は単なる定数行列であって，これそのものがローレンツ変換で変化するわけではない．方程式が別の座標系でどのように書けるかは，4 成分スピノル $\psi$ がローレンツ変換でどのように変換するかにかかっている．この変換 $\psi(x) \to \psi'(x')$ が

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{3.20}$$

と表せるとする．ここで $S$ は $\Lambda$ によって決まる 4 次の行列であり，スピノルの 4 つの成分が座標変換でどのように混じるかを表している．

そこで，ディラック方程式 (3.15) が変換後の座標系でどのように表されるかを見よう．まず，左から $S$ をかけると，第 2 項は (3.20) の形になる．第 1 項もその形にするため，間に $S^{-1}S$ を挿入して，

$$\left[i\hbar S\gamma^\mu S^{-1}\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right]S\psi(x) = 0. \tag{3.21}$$

この式を座標 $x'$ を用いて表すには，$x$ 微分を $x'$ 微分に書き直す必要がある．

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu\frac{\partial}{\partial x'^\nu} \tag{3.22}$$

なので，

$$\left[i\hbar\Lambda^{\nu}{}_{\mu}S\gamma^{\mu}S^{-1}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}-mc\right]\psi'(x')=0. \tag{3.23}$$

これが

$$\left[i\hbar\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}-mc\right]\psi'(x')=0 \tag{3.24}$$

となれば，新しい座標系でもディラック方程式が成り立つ*3)．そのためには $S$ が関係式

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu}S\gamma^{\mu}S^{-1}=\gamma^{\nu} \tag{3.25}$$

をみたせばよい．このような $S$ を探すため，微小ローレンツ変換 (3.5) に対し，$S$ を $\epsilon_{\mu\nu}$ の 1 次までで

$$S\simeq 1-\frac{i}{4}\epsilon_{\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma} \tag{3.26}$$

と書く．$\epsilon_{\rho\sigma}$ は $\rho,\sigma$ の入れ換えに対し反対称なので，$\sigma^{\rho\sigma}$ も同様に反対称としてよい*4)．これを代入すると，

$$(\delta^{\nu}_{\mu}+\epsilon^{\nu}{}_{\mu})(1-\tfrac{i}{4}\epsilon_{\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma})\gamma^{\mu}(1+\tfrac{i}{4}\epsilon_{\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma})=\gamma^{\nu}\ . \tag{3.27}$$

$\epsilon$ の 1 次の部分を取り出すと

$$\epsilon_{\rho\sigma}[\sigma^{\rho\sigma},\gamma^{\nu}]+4i\epsilon^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}=0 \tag{3.28}$$

が得られる．$\epsilon_{\rho\sigma}$ の係数の形にまとめるため，第 2 項で $\mu$ を $\sigma$ と書き換え，$\nu$ を下におろして整理すると

$$\epsilon_{\rho\sigma}\big([\sigma^{\rho\sigma},\gamma^{\nu}]+4ig^{\rho\nu}\gamma^{\sigma}\big)=0 \tag{3.29}$$

となる．微小ローレンツ変換のパラメータ $\epsilon_{\rho\sigma}$ は任意に変化させることができるので，それぞれの係数を 0 とおくことができるように錯覚しがちであるが $\epsilon_{\sigma\rho}=-\epsilon_{\rho\sigma}$ という制限があるため，反対称部分についてしか 0 にならない*5)．これより，$\sigma^{\rho\sigma}$ のみたすべき条件として

$$[\sigma^{\rho\sigma},\gamma^{\nu}]=-2i(g^{\rho\nu}\gamma^{\sigma}-g^{\sigma\nu}\gamma^{\rho}) \tag{3.30}$$

---

*3) より一般には，(3.24) に現れる $\gamma^{\mu}$ は，もとの (3.15) の $\gamma^{\mu}$ と同一でなくても，(3.16) をみたすような別のセットであってもよいが，その場合でも (3.19) の同値関係により，$S$ を定義し直せば同一の $\gamma^{\mu}$ にできる．

*4) 仮に対称部分があったとしても，$\epsilon_{\rho\sigma}$ と縮約すると 0 になり残らない．

*5) 2 階テンソル $T^{\mu\nu}$ が，任意の 2 階反対称テンソル $\epsilon_{\mu\nu}$ に対し，関係式 $\epsilon_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=0$ をみたしたとする．$T^{\mu\nu}$ を対称部分と反対称部分に分ける

$$T^{\mu\nu}=\tfrac{1}{2}(T^{\mu\nu}+T^{\nu\mu})+\tfrac{1}{2}(T^{\mu\nu}-T^{\nu\mu})\equiv S^{\mu\nu}+A^{\mu\nu}$$

と，$\epsilon$ が反対称なら自動的に $\epsilon_{\mu\nu}S^{\mu\nu}=0$ なので $S^{\mu\nu}$ は任意でよく，$A^{\mu\nu}=0$ という条件しか得られない．

が得られる．この関係式をみたす $\sigma^{\mu\nu}$ は

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{3.31}$$

で与えられる[*6]．実際，$\mu \neq \nu$ ならば (3.16a) を用いて $\sigma^{\mu\nu} = i\gamma^\mu\gamma^\nu$ と書けるので，

$$\begin{aligned}
[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] &= i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda - i\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu \\
&= i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda - i(2g^{\lambda\mu} - \gamma^\mu\gamma^\lambda)\gamma^\nu \\
&= i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda - 2ig^{\lambda\mu}\gamma^\nu + i\gamma^\mu(2g^{\lambda\nu} - \gamma^\nu\gamma^\lambda) \\
&= i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda - 2ig^{\lambda\mu}\gamma^\nu + 2ig^{\lambda\nu}\gamma^\mu - i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda \\
&= -2i(g^{\lambda\mu}\gamma^\nu - g^{\lambda\nu}\gamma^\mu)\,.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

これでディラック方程式の（微小）ローレンツ変換のもとでの共変性が確かめられ，4 成分スピノルがどのように変換するかがわかったことになる．この関係 (3.20) を，$x' = \Lambda x$ を逆に解いて

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \tag{3.33}$$

と書き，さらに $x'$ を $x$ と書き換えると

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \tag{3.34}$$

となる．微小変換の場合，

$$\begin{aligned}
\psi\big((\Lambda^{-1}x)^\mu\big) &= \psi(x^\mu - \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu) \\
&\simeq \psi(x^\mu) - \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi(x^\mu)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

とテイラー展開できるので，式 (3.34) は

$$\psi'(x) \simeq \psi(x) - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}\left[i\left(x^\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu} - x^\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\right]\psi(x) \tag{3.36}$$

と書ける．ローレンツ変換の生成子 $M^{\mu\nu}$ は

$$\psi'(x) \simeq \left(1 - \frac{i}{2\hbar}\epsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)\psi(x) \tag{3.37}$$

と定義されるが[*7]，(3.36) より，

$$M^{\mu\nu} = x^\mu \mathsf{p}^\nu - \mathsf{p}^\mu x^\nu + \frac{\hbar}{2}\sigma^{\mu\nu} \tag{3.38}$$

---

*6)　4 次の行列で上の関係をみたすものはこれしかないことが手間をかけると示せる．具体的には，任意の 4 次行列は 3.6 節で定義する 16 個の行列 $\Gamma^A$ によって展開できるので，その展開式 $\sigma^{\rho\sigma} = a_S{}^{\rho\sigma}\,1 + a_V{}^{\rho\sigma}_{\mu}\,\gamma^\mu + \ldots$ を (3.30) に代入整理して各 $\Gamma^A$ の係数を比較すればよい．

*7)　1/2 の因子を含めるのは，$\mu, \nu$ を独立に 0 から 3 まで和をとると同じ項が 2 回くり返されるためである．

と表されることがわかる．特に $\mu, \nu$ がともに空間成分の場合の変換は空間回転であり，その生成子は角運動量演算子 $\boldsymbol{J}$

$$J_i = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \qquad (J_1 = M^{23} \text{ etc.}) \tag{3.39}$$

にほかならず，

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma} \tag{3.40}$$

となる．ここで，

$$\Sigma_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^{jk} \tag{3.41}$$

と定義した．ディラック表示では，具体的な形は (1.58) で与えたものとなる．表式 (3.40) は，全角運動量 $\boldsymbol{J}$ が軌道角運動量とそれ以外の部分 $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ の和になることを意味しており，$\boldsymbol{S}$ はスピン角運動量と解釈される．これで 1.4 節において述べたことが確かめられた．

有限変換は，変換パラメータを $\theta_{\mu\nu}$ $(= -\theta_{\nu\mu})$ として，

$$S = \exp\left(-\frac{i}{4}\theta_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \tag{3.42}$$

となる*8)．空間回転 $(\theta_{0i} = 0)$ に対しては，$\boldsymbol{\theta} = (\theta_{23}, \theta_{31}, \theta_{12})$，すなわち $\theta_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\theta_{jk}$ と書けば

$$\begin{aligned} S &= \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.43}$$

となり，上下各 2 成分がそれぞれ 2 成分スピノル（スピン 1/2 表現）として変換することがわかる．このようにして，1.3 節で予告したようにディラック方程式が表す粒子はスピン 1/2 を持っていることが導かれた．

ブースト $(\theta_{ij} = 0)$ に対しては，変換パラメータを $\boldsymbol{\eta} = (\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})$ と定義し，$\sigma^{0i} = i\alpha_i$ であることを用いると

$$S = \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right) \tag{3.44}$$

が得られる．回転に対する $S$ はユニタリ行列 $S^\dagger = S^{-1}$ であるが，ブーストに対してはそうでない（$S^\dagger = S$ である）ことに注意する．

表式 (3.44) を具体的に計算するには，行列の指数関数の定義式

---

*8) この表式を理解する方法の 1 つは

$$\exp\left(-\frac{i}{4}\theta_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{4N}\theta_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)^N$$

と書いてみると，$\epsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{N}\theta_{\mu\nu}$ の微小変換を $N$ 回くり返して有限変換が得られる．

$$\exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\alpha})^{k} \tag{3.45}$$

において，$(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2=\boldsymbol{\eta}^2$ に注意すると，行列としての構造は展開の偶数次が単位行列，奇数次が $\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ に比例するので，$\boldsymbol{\eta}$ の大きさを $\eta=|\boldsymbol{\eta}|$, $\boldsymbol{\eta}$ の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\eta}/\eta$ として

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{k\ \mathrm{even}}\frac{1}{k!}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{k}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\sum_{k\ \mathrm{odd}}\frac{1}{k!}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{k}\\
&=\cosh\frac{\eta}{2}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\sinh\frac{\eta}{2}\\
&=\begin{pmatrix}\cosh\frac{\eta}{2} & \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2}\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2} & \cosh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

と書くことができる．

変換パラメータ $\boldsymbol{\eta}$ の物理的な意味を知るためには，4 次元ベクトルの場合の微小変換 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}+\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$ から有限変換を求めると，例えば $x$ 軸方向への変換の場合には

$$\begin{pmatrix}V'^0\\ V'^1\end{pmatrix}=\exp\begin{pmatrix}0 & \eta\\ \eta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V^0\\ V^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\eta & \sinh\eta\\ \sinh\eta & \cosh\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V^0\\ V^1\end{pmatrix} \tag{3.47}$$

となるが，一方で，座標系同士の相対速度を $v$ とすると，この行列は，ローレンツ変換のよく知られた形から

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix}1 & v/c\\ v/c & 1\end{pmatrix} \tag{3.48}$$

と書けるはずなので，

$$\tanh\eta=\frac{v}{c}=\beta\,,\qquad \cosh\eta=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma \tag{3.49}$$

であることがわかる．(この $\beta$ はもちろんディラックハミルトニアンの行列 $\beta$ ではなく，無次元速度である．混同の恐れはないと思うので同じ記号を使わせてもらうことにする．$\gamma$ はローレンツ因子と呼ばれ，時間の遅れの表式などに現れる量である．)

これらを用いてディラックスピノルの変換行列を表すには，

$$\cosh^2\frac{\eta}{2}=\frac{1}{2}(\cosh\eta+1)=\frac{\gamma+1}{2}\,, \tag{3.50}$$

$$\sinh^2\frac{\eta}{2}=\frac{1}{2}(\cosh\eta-1)=\frac{\gamma-1}{2} \tag{3.51}$$

より

$$\tanh\frac{\eta}{2}=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}=\sqrt{\frac{\gamma^2-1}{(\gamma+1)^2}}=\frac{\gamma\beta}{\gamma+1} \tag{3.52}$$

なので，

$$S = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\gamma\beta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\gamma+1} \\ \dfrac{\gamma\beta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\gamma+1} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

と書ける．

静止状態に対応する解 (1.48) に対して，この変換を施してみよう．まず，指数の肩の $mc^2t$ は，静止粒子のエネルギー運動量 4 次元ベクトルを $p_\circ = (mc, \mathbf{0})$ と定義すると 4 次元内積 $p_\circ \cdot x$ と書ける．これを用いて

$$S\psi(\Lambda^{-1}x) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \begin{pmatrix} \chi \\ \dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi \end{pmatrix} e^{-ip_\circ\cdot\Lambda^{-1}x/\hbar} \tag{3.54}$$

となる．変換係数 $\Lambda$ のみたす条件 (3.3) を書き直すと

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g_{\nu\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma g^{\sigma\mu} = \Lambda_\nu{}^\mu \tag{3.55}$$

となる（詳しくは付録 B.4 参照）ので，指数の肩の内積は

$$p_\circ \cdot \Lambda^{-1}x = p_{\circ\mu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu = p_{\circ\mu}\Lambda_\nu{}^\mu x^\nu = \Lambda p_\circ \cdot x \tag{3.56}$$

と書き直せる．ベクトル $\Lambda p_\circ$ の成分は，$p_\circ$ をローレンツ変換したもので

$$\Lambda p_\circ = (E, \boldsymbol{p}) = (\gamma mc^2, \gamma\beta mc\boldsymbol{n}) \tag{3.57}$$

となる．このように，静止系からブーストして得た粒子のエネルギー・運動量と，ブーストのパラメータは

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}, \qquad \beta = \frac{|\boldsymbol{p}|c}{E} \tag{3.58}$$

の関係がある．これを用いて，スピノル部分を書き直すと

$$S\psi(\Lambda^{-1}x) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \chi \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,c}{E+mc^2}\chi \end{pmatrix} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar} \tag{3.59}$$

となる．このように静止系からローレンツ変換によって得た解は，第 1 章で直接求めた解 (1.56) と（規格化を除き）一致している．このことは，ディラック方程式の相対論的共変性を具体的に確認するものである．

## 3.4　空間反転，時間反転

前節では，ディラック方程式がローレンツ変換に対して形を変えないことを見たが，その際の変換は，微小変換をくり返して得られる有限変換，すなわち恒等変換（何もしない変換）から連続的につながる変換に限られていた．関係

式 (3.3) で定義されるローレンツ変換には，そうでない変換が存在する．空間反転 $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$ （より一般には，空間座標の右手系を左手系に移す変換），時間反転 $t \to -t$ （より一般には，光円錐の向きを逆にする変換），およびその両方を含む変換である．これらの変換については，ディラック方程式が共変かどうかはそれぞれ別に検証する必要がある．（空間反転については，2.1 節で少し触れたが，ここでは共変形で議論する．）

### 3.4.1 空間反転

空間反転は，変換行列

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

で表される変換，すなわち

$$(x^0, \boldsymbol{x}) \to (x'^0, \boldsymbol{x}') = (x^0, -\boldsymbol{x}) \tag{3.61}$$

なる変換である．これにより空間座標の右手系は左手系に移る．この変換が恒等変換と連続的につながらないことは次のようにしてわかる．一般に，$\Lambda^\mu{}_\nu$ を 4 次行列とみなしたとき，必ず $\det\Lambda = \pm 1$ でなければならない*9)．空間反転に対しては $\det\Lambda = -1$，恒等変換はもちろん $\det\Lambda = +1$ であることから，明らかに連続的に移ることはできない．空間鏡映（空間座標のうち 1 つだけの符号を逆にする）も同様に $\det\Lambda = -1$ の変換である．例えば $z$ 座標だけを反転するには，空間反転に引き続いて $z$ 軸周りに 180° 回転すれば，反転した $x, y$ 座標が元に戻る．

なお，$\Lambda^\mu{}_\nu$ で表される斉次ローレンツ変換のうち，$\det\Lambda = +1$ をみたすものを**正規ローレンツ変換**，$\Lambda^0{}_0 \geq 1$ をみたすものを**順時ローレンツ変換**と呼ぶ*10)．順時正規ローレンツ変換は 1 から連続的につながる変換である．これ以外に，$\det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \geq 1$ （空間反転を含む），$\det\Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$ （時間反転を含む），$\det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$ （時空間反転を含む）の全部で 4 つの連結成分がある．

さて，空間反転に関してディラック方程式がその形を保つようなディラックスピノルの変換が存在するかどうかを見よう．そのための条件式 (3.25) に空間反転の $\Lambda$ の形を入れると，

$$S\gamma^0 S^{-1} = \gamma^0 , \qquad S\gamma^i S^{-1} = -\gamma^i \tag{3.62}$$

*9) これは，$\Lambda$ のみたすべき関係式 (3.3) が行列の関係式 $\Lambda^T g \Lambda = g$ と書けることからわかる．（実際両辺の行列式を取ると $(\det\Lambda)^2 \det g = \det g$.）

*10) $\Lambda^\mu{}_\nu$ のみたす式 (3.3) において $\rho = \sigma = 0$ と選ぶと $(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 = 1$ となるので，これから $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$ がわかる．

となる．左より $S$ をかけると，

$$S\gamma^0 = \gamma^0 S\ , \qquad S\gamma^i = -\gamma^i S. \tag{3.63}$$

このような $S$, すなわち $\gamma^0$ と可換で $\gamma^i$ と反可換な行列には $\gamma^0$ 自身がある．一般にはその定数倍が (3.63) をみたすが，ユニタリ行列に限ると，定数は絶対値 1 の複素数となる．したがって，空間反転に対し

$$S = \eta_P \gamma^0 \tag{3.64}$$

となる．ここで $\eta_P$ は $|\eta_P| = 1$ をみたす位相因子であり，現時点では何でもよい．このように,（自由）ディラック方程式は空間反転のもとで不変であることがわかる．

ディラック方程式の解 (1.56) が空間反転でどう変換するかを見ると，

$$\begin{aligned}\psi'(\boldsymbol{x},t) &= S\psi(-\boldsymbol{x},t)\\ &= \begin{pmatrix}\chi \\ -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E_{\boldsymbol{p}}+mc^2}\chi\end{pmatrix}\eta_P e^{i(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_{\boldsymbol{p}}t)/\hbar}\end{aligned} \tag{3.65}$$

となる．これを元の式

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \begin{pmatrix}\chi \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}c}{E_{\boldsymbol{p}}+mc^2}\chi\end{pmatrix} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_{\boldsymbol{p}}t)/\hbar} \tag{1.56}$$

と比較すると，位相因子を除いて，運動量 $\boldsymbol{p}$ の向きを反対にしたものと等しくなっていることがわかる．これは，古典力学の運動量が空間反転で符号を変える*11) ことと符合する結果である．

また，(1.56) で，特にヘリシティ固有状態 ($\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi = \pm|\boldsymbol{p}|\chi$) の場合，空間反転でヘリシティが逆転することになる．これは，運動量が空間反転で符号を変えるのに対し，スピン角運動量は符号を変えないためと解釈できる．

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}$ のように空間反転で符号の変わるベクトルを**極性ベクトル**，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$ や $\boldsymbol{S}$ のように符号の変わらないベクトルを**軸性ベクトル**と呼ぶ．

### 3.4.2 時間反転

量子力学では，時間反転は空間反転と違い特別な性質を持つ変換である．シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{x},t) + V(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{3.66}$$

で $\psi'(\boldsymbol{x},t'=-t) = \psi(\boldsymbol{x},t)$ とすると

*11) （相対論的）古典力学では運動量は $m\dot{\boldsymbol{x}}/\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}$ で与えられるので，$\boldsymbol{x}\to-\boldsymbol{x}$, $t\to t$ で符号を変える．

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\psi'(\boldsymbol{x},t') = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi'(\boldsymbol{x},t') + V(\boldsymbol{x})\psi'(\boldsymbol{x},t') \tag{3.67}$$

となる．元の方程式が $e^{-iEt/\hbar}$ という時間依存性を持つエネルギー固有状態の解を持っていたとすると，$\psi'$ は $e^{+iEt'/\hbar}$ なる時間依存性を示す．元の方程式の記述する系のエネルギー固有値が $E \geq E_0$ というスペクトルを持っているならば，$\psi'$ の時間依存性が意味するところから，変換後のエネルギー固有値は $E \leq -E_0$ をみたし，下限が存在しない系となってしまう．これは求める変換ではない．

この問題を解決するには，時間反転変換後の $\psi$ は波動関数ではなく，その複素共役であると解釈すればよい．この正しい時間反転の定義はウィグナーによって与えられたものであり，時間反転演算子は量子力学に現れる通常の線形演算子ではなく，**反線形演算子**と呼ばれる性質のものとして定式化できる．（より詳しくは付録 F を参照のこと．）

ディラック方程式についても同様であり，ここでは時間反転に対しては変換が (3.20) でなく，

$$\psi'^*(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{3.68}$$

であるとして，時間反転不変性が成り立つ $S$ の選び方があるかどうかを調べよう．前節と同様な手続きを進めると，(3.23) の中の $\psi'(x')$ が $\psi'^*(x')$ に変わるので，$\psi'(x')$ に戻すため複素共役を取れば

$$\left[-i\hbar\Lambda^{\nu}{}_{\mu}S^*(\gamma^{\mu})^*(S^{-1})^*\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - mc\right]\psi'(x') = 0 \tag{3.69}$$

となる．したがって $S$ のみたすべき関係式は

$$-\Lambda^{\nu}{}_{\mu}S^*(\gamma^{\mu})^*(S^{-1})^* = \gamma^{\nu} \tag{3.70}$$

となる．時間反転に対する $\Lambda$ は

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

となるので，

$$S^*(\gamma^0)^*(S^{-1})^* = \gamma^0\,, \qquad S^*(\gamma^i)^*(S^{-1})^* = -\gamma^i. \tag{3.72}$$

ガンマ行列の（反）エルミート性 (3.16b) より

$$(\gamma^0)^* = (\gamma^0)^T\,, \qquad (\gamma^i)^* = -(\gamma^i)^T \tag{3.73}$$

が成り立つので，(3.72) はまとめて

$$S^*(\gamma^\mu)^T(S^{-1})^* = \gamma^\mu \tag{3.74}$$

と書ける．これをみたす行列 $S$ が存在することは，ガンマ行列の基本的性質 (3.16a) の転置を取った式

$$(\gamma^\nu)^T(\gamma^\mu)^T + (\gamma^\mu)^T(\gamma^\nu)^T = g^{\mu\nu} \tag{3.75}$$

が，$\{(\gamma^\mu)^T\}$ が別の 1 つのガンマ行列の表示を与えていることを意味することに気づけば，ガンマ行列の同値性そのものである．時間反転行列 $B$ を $B = (S^{-1})^*$ で定義すると，性質

$$B^{-1}(\gamma^\mu)^T B = \gamma^\mu\,, \qquad B^\dagger B = 1 \tag{3.76}$$

が成り立つ．ガンマ行列のディラック表示 (3.18) では，$\gamma^0$ と $\gamma^2$ が対称行列，残り 2 つが反対称行列なので，これをみたす $B$ は，任意位相を除いて $B = \gamma^1\gamma^3$ の形をしていることがわかる．(一般の表示ではこの関係は必ずしも成立しないことに注意.)

## 3.5 スピノル 2 つからスカラー，ベクトルを構成する

1.2 節において，ディラック波動関数の確率解釈可能性について調べたが，そこでは確率密度と解釈可能な量の候補として

$$P = \psi^\dagger\psi \tag{3.77}$$

が見出された．この量はローレンツ変換のもとでどのようにふるまうだろうか．ディラックスピノル $\psi$ の変換は 3.3 節で詳しく調べたように，$\psi \to S\psi$ と変換し，$\psi^\dagger$ はそれに従い $\psi^\dagger \to \psi^\dagger S^\dagger$ と変換するので

$$\psi^\dagger\psi \to \psi^\dagger S^\dagger S\psi \tag{3.78}$$

となる．変換行列 $S$ がユニタリ行列であれば $S^\dagger S = 1$ ゆえ，$\psi^\dagger\psi$ は不変となる．空間回転に関しては確かにそうなっていて，$\psi^\dagger\psi$ は 3 次元的にはスカラー量（正しくはスカラー密度）である．しかし，ブーストに対しては $S$ はユニタリでないため，相対論的なスカラー量ではない．

それでは，$\psi$ から作ることのできる相対論的スカラー量があるだろうか．ブーストに対する変換行列 (3.44) は

$$S = S^\dagger = \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\,, \qquad S^{-1} = \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right) \tag{3.79}$$

をみたす．よって，行列 $\gamma^0 = \beta$ が $\alpha_i$ のいずれとも反可換であることに着目すると，性質

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right) = S^{-1} \tag{3.80}$$

が成り立つ．空間回転の $S$ (3.43) に対しては，$\gamma^0$ は $\Sigma_i$ と可換なので，$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^\dagger = S^{-1}$ が成立する．よって，$\psi$ の**ディラック共役** $\bar{\psi}$ を

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \tag{3.81}$$

で定義すると，その変換は

$$\bar{\psi} \to \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger (\gamma^0)^2 S^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 S^{-1} = \bar{\psi} S^{-1} \tag{3.82}$$

となる．このことから，量 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ はローレンツスカラー量であることがわかる*12)．

上で挙げた量 $P$ は，ディラック共役を用いると $P = \bar{\psi}\gamma^0\psi$ と書くことができるが，確率流密度に対応する量 $\boldsymbol{j}$ (1.35) は，$\boldsymbol{j} = c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi = c\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi$ と書けるので，これらは 4 次元ベクトルカレント

$$j^\mu(x) = (c\rho, \boldsymbol{j}) = c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{3.83}$$

をなしているように見える．連続方程式がこのカレントの 4 次元発散が 0 である

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = 0 \tag{3.84}$$

という形に書けることからも，これは推察される．カレント (3.83) が実際にローレンツ変換のもとでどのように変換するかを見てみよう．ここで必要な関係式は (3.25) $\Lambda^\nu{}_\mu S\gamma^\mu S^{-1} = \gamma^\nu$ より導かれる $\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}\gamma^\nu S$ である．

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \to \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\psi = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}\gamma^\nu\psi \tag{3.85}$$

と，確かに 4 次元ベクトルとして変換する．すなわち，ブーストのもとでは，$\rho$ と $\boldsymbol{j}$ が混ざることになる．

## 3.6 ガンマ行列の代数

ここで，ガンマ行列の性質を詳しく見ていこう．ガンマ行列を定義する基本的な性質は，3.2 節で述べたとおり，

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = g^{\mu\nu}\,, \tag{3.16a}$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0\,, \qquad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \tag{3.16b}$$

である．関係式 (3.16a) の意味するところは，(1) 2 つの異なるガンマ行列同

*12) このことは，ガンマ行列の表現によらずに示せる．$S$ の一般形 (3.42) を級数展開の形に書き，$\sigma^{\mu\nu}$ と $\gamma^0$ の交換関係式［(3.30) で $\nu = 0$ としたもの］と，性質 $(\sigma^{0i})^\dagger = -\sigma^{0i}$, $(\sigma^{ij})^\dagger = \sigma^{ij}$ ［(3.31) から直ちに得られる］を使えば証明できる．

士は反可換；(2) 自分自身とは可換であり，2 乗すると $\pm 1$ という 2 つである．

まず，任意の数のガンマ行列の積

$$\Gamma = \gamma^\mu \gamma^\nu \cdots \gamma^\tau \ , \tag{3.86}$$

例えば $\gamma^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3\cdots\gamma^0$ のようなものを考えよう．ガンマ行列同士は可換か反可換かのいずれかなので，ガンマ行列同士の順序を入れかえて，最初に $\gamma^0$ を集め, 次に $\gamma^1, \ldots$ となるような順序

$$\Gamma = \pm(\gamma^0)^{n_0}(\gamma^1)^{n_1}(\gamma^2)^{n_2}(\gamma^3)^{n_3} \tag{3.87}$$

に直すことができる．この形に持っていく過程で，異なるガンマ行列同士の入れ替えを奇数回行った場合は符号 $-1$ が生ずる．さらに，ガンマ行列の 2 乗は $\pm 1$ であるから，各 $n_i$ は 0 または 1 のどちらかにできる．このように，ガンマ行列の任意数の積は，符号を除きこれら $2^4 = 16$ 個の行列のいずれかに等しい．この 16 個を具体的に書くと，

$$\Gamma = \{1, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^\nu \ (\mu < \nu), \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho \ (\mu < \nu < \rho), \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\} \tag{3.88}$$

であり，各種類の行列はそれぞれ 1, 4, 6, 4, 1 個ある．この数 16 は，4 行 4 列の行列全体をベクトル空間とみなしたときの次元（一次独立な行列の数）と一致していることに注意する．

これらの行列を後で使いやすくするための記法として，行列 $\gamma_5$ を

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{3.89}$$

で定義し，ガンマ行列 4 つの積の代わりに用いる．この行列が,

$$(\gamma_5)^2 = 1 \ , \tag{3.90a}$$

$$\gamma_5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma_5 \ , \tag{3.90b}$$

$$\gamma_5{}^\dagger = \gamma_5 \tag{3.90c}$$

という性質を持つ*13) ことはすぐ確かめられる．

この行列を用いると，ガンマ行列の 3 つの積は，符号を除き $i\gamma^\mu\gamma_5$ と書くことができる．また，ガンマ行列の 2 つの積の代わりに，$\sigma^{\mu\nu} = i\gamma^\mu\gamma^\nu \ (\mu < \nu)$ を用いて，16 個の行列として

$$\Gamma^A = \{1, \, \gamma^\mu, \, \sigma^{\mu\nu} \ (\mu < \nu), \, i\gamma^\mu\gamma_5, \, \gamma_5\} \tag{3.91}$$

$(A = 1, \ldots, 16)$ を選ぶのが便利である．

このおのおのに対し，上付き添字を下ろしたものを

---

*13) これらの関係は，$\gamma^\mu$ と $i\gamma_5$ を合わせると 5 次元時空のガンマ行列になっていることを示唆する．4 次元以外の時空におけるガンマ行列については，詳しくは付録 E 参照．

$$\Gamma_A = \{1,\, \gamma_\mu,\, \sigma_{\mu\nu}\ (\mu < \nu),\, i\gamma_\mu\gamma_5,\, \gamma_5\} \tag{3.92}$$

のように定義すると，

$$\Gamma_A = \begin{cases} \Gamma^A & \Gamma^A = 1,\, \gamma^0,\, \sigma^{ij},\, i\gamma^0\gamma_5,\, \gamma_5 \\ -\Gamma^A & \text{それ以外} \end{cases} \tag{3.93}$$

であるが，単純計算により

$$\Gamma^A \Gamma_A = 1 \tag{3.94}$$

すなわち

$$(\Gamma^A)^{-1} = \Gamma_A \tag{3.95}$$

が確かめられる．（添字 $A$ はくり返されても自動的には和をとらないこととする.）

次に，$\Gamma^A$ のそれぞれ（1 以外）に対し，うまく $\Gamma^B$ を選ぶと

$$\Gamma^B \Gamma^A \Gamma_B = -\Gamma^A \tag{3.96}$$

となることが言える．実際，この式は $\Gamma^B\Gamma^A = -\Gamma^A\Gamma^B$ とも書けるので，$\Gamma^A = \gamma^\mu$, $\sigma^{\mu\nu}$, $i\gamma^\mu\gamma_5$, $\gamma_5$ に対し，例えばそれぞれ $\Gamma^B = \gamma_5$, $\gamma^\mu$, $\gamma_5$, $\gamma^\mu$ をとればよい.（$\Gamma^B$ の選び方はいろいろある.）関係式 (3.96) のトレースをとると，左辺はトレースの循環性を用いて

$$\mathrm{tr}\big[(\Gamma^B\Gamma^A)\Gamma_B\big] = \mathrm{tr}\big[\Gamma_B(\Gamma^B\Gamma_A)\big] = \mathrm{tr}\,\Gamma^A \tag{3.97}$$

となるが，これが右辺のトレース $-\mathrm{tr}\,\Gamma^A$ に等しいので，

$$\mathrm{tr}\,\Gamma^A = 0 \quad (\Gamma^A \neq 1) \tag{3.98}$$

が結論される．

次に，$\Gamma$ の 2 つの積のトレース

$$\mathrm{tr}\,\Gamma^A\Gamma_B \tag{3.99}$$

を考える．$A = B$ のときは，上で示したことから

$$\mathrm{tr}\,\Gamma^A\Gamma_B = \mathrm{tr}\,1 = 4 \tag{3.100}$$

であるが，$A \neq B$ のときは，積 $\Gamma^A\Gamma_B$ は必ず $\gamma^\mu$ を 1 個以上含む形になるので，因子 $\pm 1$ または $\pm i$ を除いて，ある $\Gamma^C \neq 1$ に等しい．したがって

$$\mathrm{tr}\,\Gamma^A\Gamma_B = 0 \quad (A \neq B) \tag{3.101}$$

である．まとめて

$$\mathrm{tr}\,\Gamma^A\Gamma_B = 4\delta^A_B\,. \tag{3.102}$$

これらの関係式より，16 個の $\Gamma^A$ の線形独立性，すなわち

$$\sum_{A=1}^{16} c_A\Gamma^A = 0 \Longrightarrow \forall c_A = 0 \tag{3.103}$$

が証明できる．実際，(3.103) に $\Gamma_B$ をかけてトレースを取ると，$c_B = 0$ が導かれる．

これから，任意の 4 次行列 $M$ は 16 個の $\Gamma$ を用いて展開することができる．

$$M = \sum_{A=1}^{16} a_A\Gamma^A = a_I + a_\mu\gamma^\mu + \frac{1}{2}a_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + a_{5\mu}i\gamma^\mu\gamma_5 + a_5\gamma_5\,. \tag{3.104}$$

展開係数 $a_A$ を求めるには，

$$a_A = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,\Gamma_A M\,, \tag{3.105}$$

すなわち，

$$a_I = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,M\,, \tag{3.106a}$$

$$a_\mu = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,\gamma_\mu M \tag{3.106b}$$

等を計算すればよい．

ガンマ行列のより詳しい性質の議論は付録 D に譲る．

## 3.7 スピノル 2 つで作れる量

3.5 節では，ディラックスピノルとそのディラック共役からなる量 $\bar\psi\psi$, $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ がそれぞれローレンツスカラー，ベクトルであることを示した．ディラックスピノルの成分と，そのディラック共役の成分からなる量は，全部で 16 個の異なるもの $\bar\psi_\alpha\psi_\beta$ $(\alpha,\,\beta = 1,\,2,\,3,\,4)$ が作れる．$\bar\psi\psi$ は，そのうちである特定の組合せをとったものである．ここでは 16 個それぞれがローレンツ変換のもとでどのように変換する量かを見たい．

このためには，16 個の独立な組合せとして，$\bar\psi\Gamma^A\psi$ の形のものを用いると便利である．このうち，$\Gamma^A = 1,\,\gamma^\mu$ の場合がスカラー，ベクトルとして変換することはすでに見た．それ以外の 11 個の量に対しても同様に調べるには，

$$S^{-1}\Gamma^A S \tag{3.107}$$

がどうなるかを知ればよい．$\sigma^{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ に対しては，

$$\begin{aligned} S^{-1}\sigma^{\mu\nu}S &= S^{-1}i\gamma^\mu\gamma^\nu S = iS^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu S = i\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\gamma^\sigma \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\sigma^{\rho\sigma}. \end{aligned} \tag{3.108}$$

次に，$\gamma_5$ に対しては，

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{3.109}$$

とも書ける[*14]ことに注意すると，

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma_5 S &= \frac{i}{4!}\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}S^{-1}\gamma^\kappa S\cdots S^{-1}\gamma^\nu S \\ &= \frac{i}{4!}\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\Lambda^\kappa{}_\rho\Lambda^\lambda{}_\sigma\Lambda^\mu{}_\tau\Lambda^\nu{}_\upsilon\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\upsilon \\ &= \frac{i}{4!}(\det\Lambda)\epsilon_{\rho\sigma\tau\upsilon}\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\upsilon \\ &= (\det\Lambda)\gamma_5. \end{aligned} \tag{3.110}$$

これから，

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\,\bar{\psi}\sigma^{\rho\sigma}\psi, \tag{3.111}$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \longrightarrow (\det\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu\,\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \tag{3.112}$$

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi \longrightarrow (\det\Lambda)\,\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{3.113}$$

がわかる．それぞれの変換性は 2 階の反対称テンソル，軸性ベクトル，擬スカラーである．最後の $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ は，1 から連続的につながるローレンツ変換に対してはスカラーであるが，空間反転など $\det\Lambda = -1$ の変換では符号を変える．

*14) ここで 4 次元の完全反対称テンソルは $\epsilon_{0123} = +1$ と約束する.（従って $\epsilon^{0123} = -1$.）

# 第 4 章
# 反粒子

反粒子の存在は，量子力学と相対論の帰結と言ってもよいであろう．

ディラック方程式が 1928 年に世に出たのち，物理学者を悩ませたのは負エネルギー解の問題であった．それが陽子を記述するのではないかと考えられた時期もあったが，3 年後の 1931 年，同じディラックにより，その解釈として電子の反粒子*1) であり，正の電荷を持つ陽電子の存在が予言された．翌 1932 年には，アンダーソンにより宇宙線の中に陽電子が発見されている（ディラックの予言を確かめようとしてではないが…）．

反粒子の理論的記述は量子場の理論によってなされるが，これについては第 6 章で簡単に述べることにし，本章ではディラック，ファインマン流の 2 種類の負エネルギー解の解釈を紹介したのち，負エネルギー解と反粒子の波動関数の関係を述べる．

## 4.1 負エネルギー解

第 1 章で見たように，ディラック方程式には負のエネルギー解が存在する（図 4.1）．ここでは，その意味を議論しよう．

数学の問題では，方程式の解として題意に合わない解が現れることは稀ではない．古典力学の波動方程式であれば，仮に負エネルギー解が存在しても，不適切として無視することが可能である．量子力学的にも，完全に自由場であれば，解は独立なので，解を正エネルギーに制限することもできるであろう．しかし，相互作用を考えたとたん，それは許されなくなる．

例えば，第 2 章で扱った水素原子であるが，その基底状態である 1S 状態は安定であるはずである．しかし，負エネルギー状態が存在すると，1S 状態から光子を放出して負エネルギー状態に遷移する過程が起こりうる．この確率を摂

---

*1) 反粒子 (antiparticle) という言葉はド・ブローイ (1934) による．

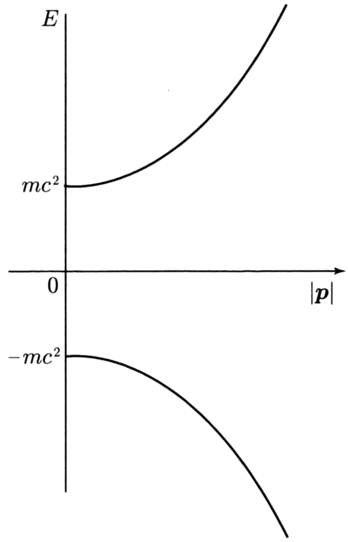



**図 4.1**　相対論的なエネルギースペクトル．負エネルギー解は $-\infty$ まで続いている．ディラックの解釈では，真空は負エネルギーのレベルにすべて粒子が詰まった状態である．$-mc^2 < E < mc^2$ にはギャップがある．

動論を用いて計算すると，行き先の負エネルギー状態として $-mc^2$ からその数倍程度の間の状態に限っても，1 秒よりはるかに短い時間の間に負エネルギー状態に落ち込んでしまうことがわかる．

一方，正エネルギー解の固有値は $mc^2$ 以上であり，負エネルギー解は $-mc^2$ 以下である．したがって正エネルギー状態から負エネルギー状態への遷移の際のエネルギー差は質量エネルギーの 2 倍以上であり，粒子の対をつくることが十分可能なエネルギーである．このような状況では，非相対論的量子力学のような粒子数を固定した系の記述は不適切となる．1 体問題，2 体問題という枠組みの中で閉じることができなくなるのである．このような粒子数の変化を含めた過程を記述できるのが量子場の理論である．

場の理論を用いる前に，直観的な負エネルギー解の解釈を 2 つ挙げることにする．1 つはディラックの空孔理論による解釈，もう 1 つはファインマン流の時間を逆行する粒子の解釈である．

### 4.1.1　ディラックの空孔理論

ディラックは，真空が，負エネルギー解に対応する状態がすべて粒子によって占められている状態であると仮定して，負エネルギー解の合理的な説明を得た．ただし，この解釈は粒子がフェルミ統計に従うことが前提となる．この場合，それぞれの状態には 1 粒子しか存在できないので，すでに占められている状態に新たに粒子が入ることはできない．したがって，正エネルギー状態の粒子は，負エネルギー状態に遷移することが禁止され，安定になることが可能と

なる．

真空がこのような状態であると仮定して，負エネルギー状態につまっている粒子の１つが何らかの相互作用によりエネルギーを得て正エネルギー状態に遷移したとすると，負エネルギー状態の１つに粒子が存在しない状態が生ずる．このような，粒子の存在しない負エネルギー状態を**空孔**と呼ぶことにする．

空孔状態を真空を基準として見ると，もともと存在したこの負エネルギー状態のエネルギーがなくなっているので，正エネルギーを持っているように見える．また，対応する運動量も欠落しているので，この空孔は負エネルギー状態の運動量の逆向きの運動量を持っているかのように見える．また，この粒子を電子とすれば，電荷 $-e$ の電子が１つ存在しないことは，電荷 $+e$ の粒子が存在しているように見える．このように，負エネルギーの粒子が存在しない状態は，正エネルギーの「反粒子」として観測される．反粒子は粒子と反対の電荷（およびその他の量子数）を持つ．

固体中では，自由電子の基底状態はフェルミ面まで電子がつまった状態であるが，半導体では，ドーピングにより電子が余った状態や足りない状態を作る．フェルミ面まで電子のつまった状態を「真空」と解釈すれば，電子が足りない状態は逆の電荷を持つ「空孔」が存在すると見ることができる．

### 4.1.2　ファインマンの解釈

ファインマンは，負エネルギー状態の解釈として，ボーズ統計に従う粒子にも通用する解釈を提起した．これは，量子論と相対論を組み合わせることにより，時間を逆行する粒子の存在が示されるが，それは反粒子と解釈するべきというものである．

特殊相対論によれば，電子などの質量を持つ粒子の速度は光速より小さい．時空ダイアグラムでは，その世界線は光円錐の内側に限られる．しかし，不確定性関係から推察されるかもしれないが，量子論では，光円錐の外側にしみ出すことがありうる．そのような粒子は，ある座標系では時間の増える方向に進んでいても，別の座標系では時間の減る方向に進むことになる．これは時間を逆行する粒子である．これをむしろ通常の時間の向きに進む反粒子とみなすべきであるとしたのがシュテュッケルベルクやファインマンである．電子のように電荷を持つ粒子の場合，電荷の流れの方向を考えると，反粒子は粒子と反対符号の電荷を持たなければならないことがわかる．

この解釈に立つと，負エネルギー解は，反粒子の正エネルギー解の複素共役と考えるとうまくいく．

## 4.2　反粒子の波動関数

ファインマンの解釈により，負エネルギー解の複素共役によって反粒子の波

動関数が表されることになる．負エネルギー解 (1.57) の複素共役

$$\psi^*(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix} -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{p}c}{E_{\boldsymbol{p}}+mc^2}\chi'^* \\ \chi'^* \end{pmatrix} e^{i(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_{\boldsymbol{p}}t)/\hbar} \tag{4.1}$$

は，エネルギー $E_{\boldsymbol{p}}$, 運動量 $-\boldsymbol{p}$ の反粒子を表す．これがみたす方程式は，ディラック方程式 (3.15) の複素共役

$$\left[-i\hbar\gamma^{\mu*}\frac{\partial}{\partial x^\mu}-mc\right]\psi^*(x)=0 \tag{4.2}$$

で与えられるので，ディラック方程式と形は異なる．だが，$\psi^*$ は 4 つの成分 $\psi^*_\alpha$ を持つので，これらを適当に組み直したもの

$$\psi^c_\alpha(\boldsymbol{x},t)=A_{\alpha\beta}\psi^*_\beta(\boldsymbol{x},t) \tag{4.3}$$

（$A$ は $A^\dagger A=1$ をみたす 4 行 4 列の定数行列）も反粒子の波動関数として同等の資格を持つ.（もちろんこれはスピノル空間の基底を取り直すことに相当する.）もし，$A$ をうまく選んで，$\psi^c$ がディラック方程式をみたすようにできれば，反粒子の波動関数を粒子の波動関数と対称な形で取り扱うことができる．ディラック方程式の複素共役 (4.2) の左から $A$ をかけると

$$\left[-i\hbar A\gamma^{\mu*}A^{-1}\frac{\partial}{\partial x^\mu}-mc\right]A\psi^*(x)=0 \tag{4.4}$$

となるので，これがディラック方程式と同じ形になるには，関係

$$A\gamma^{\mu*}A^{-1}=-\gamma^\mu \tag{4.5}$$

が成立すればよいことがわかる．ここで，$\{-\gamma^{\mu*}\}$ が $\{\gamma^\mu\}$ のみたす (3.16a) と同じ性質をみたしていることに注意すれば，ガンマ行列の表示の同値性より，このような行列 $A$ は存在するはずである．実際ガンマ行列のディラック表示では，$\gamma^2$ だけが純虚数行列，それ以外はすべて実行列なので，$A$ としては位相を除き $\gamma^2$ とすればよい．

通常は，$\psi^c$ を $\psi^*$ の代わりに $\psi$ のディラック共役 $\bar\psi$ を用いて $\psi^c=C\bar\psi^T$ と表す．$\bar\psi_\alpha=(\psi^\dagger\gamma^0)_\alpha$ なので，行列 $C$ は $C=A(\gamma^0)^T$ と書くことができる．ディラック表示で通常用いる形は

$$C=i\gamma^2\gamma^0=\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

である*2).

以上のように，反粒子のスピノル $\psi^c$ はディラック方程式をみたすので，反

*2) この形はディラック表示以外の表示では一般に異なる．$\gamma^2$ は単に行列として $\gamma^2$ と同じ形というだけで，物理的な $\gamma^2$ の意味は全くない．

粒子の波動関数は，粒子の波動関数と同じ形をしていることになり，あらためて調べることなく，いままで粒子の（正エネルギー）波動関数について議論したさまざまな性質がそのまま反粒子にも適用できる．

## 4.3 荷電共役行列 $C$

前節で定義した行列 $C$（**荷電共役行列**と呼ぶ）は，$\psi$ のディラック共役 $\bar{\psi}$ によって反粒子のスピノルを与えるものであった．

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T \qquad \text{すなわち} \qquad \psi^c_\alpha = C_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta \tag{4.7}$$

$C$ のみたすべき性質として，2 つが挙げられる．

1. $\psi$ と $\psi^c$ の規格化が異ならないため，$C$ はユニタリ行列

$$CC^\dagger = 1\ . \tag{4.8}$$

2. $\psi$ がディラック方程式をみたすとき，$\psi^c$ もディラック方程式をみたす．この条件から，

$$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu\ . \tag{4.9}$$

このような行列 $C$ の存在はガンマ行列の同値性により保証される．

性質 (4.9) を用いて，16 個の行列 $\Gamma$ に対し同様の関係を導くことができる．

$$\Gamma^c \equiv C\Gamma^T C^{-1} = \epsilon_C^{(\Gamma)}\Gamma \tag{4.10}$$

ただし $\epsilon_C^{(\Gamma)}$ は符号因子で

$$\epsilon_C^{(\Gamma)} = \begin{cases} +1 & \Gamma = 1,\ \gamma^\mu\gamma_5,\ \gamma_5 \\ -1 & \Gamma = \gamma^\mu,\ \sigma^{\mu\nu} \end{cases} \tag{4.11}$$

である．

次にこれを用いて行列 $C$ が反対称行列であることを示そう．まず，(4.10) の転置を取ると $(C^{-1})^T\Gamma C^T = \epsilon_C^{(\Gamma)}\Gamma^T$ となるが，これを (4.10) に代入して $C(C^{-1})^T\Gamma C^T C^{-1} = \Gamma$ となる．これから

$$\Gamma C^T C^{-1} = C^T C^{-1}\Gamma \tag{4.12}$$

が得られるが，16 個の $\Gamma$ の線形結合で任意の行列が表せるので，これは $C^TC^{-1}$ があらゆる行列と可換であることを意味する．このような行列はシューアの補題により単位行列の定数倍に限られるので，$\lambda$ を複素数として $C^TC^{-1} = \lambda$ すなわち

$$C^T = \lambda C \tag{4.13}$$

となる．この関係の転置を取って元の式に代入すると $C = \lambda^2 C$ となるので，$\lambda^2 = 1$, したがって $\lambda = \pm 1$ であり，$C$ は対称行列か反対称行列のいずれかである．ここで，(4.10) を $C\Gamma^T = \epsilon_C^{(\Gamma)}\Gamma C$ と書き換え，左辺の $C$ を $\lambda C^T$ で置き換えれば，

$$(\Gamma C)^T = \lambda\epsilon_C^{(\Gamma)}(\Gamma C) \tag{4.14}$$

が導かれ，行列 $\Gamma C$ は対称か反対称となる．一方，(4.11) が示すように，16 個の $\Gamma$ のうち，$\epsilon_C^{(\Gamma)}$ が $+1$ のものが 6 個，$-1$ のものが 10 個ある．4 行 4 列の行列で対称なものは 10 個，反対称なものは 6 個の独立な行列が存在するはずなので，そのためには $\lambda = -1$ であることが必要である．こうして $C$ が反対称であることが示される．

$\psi^c$ の定義より，$\bar{\psi}^c$ は

$$\bar{\psi}^c = -\psi^T C^{-1} \tag{4.15}$$

という表式で書けるが，これと $C$ の反対称性を用いて，

$$(\psi^c)^c = \psi \tag{4.16}$$

を示すことができる．

この節で示した $C$ の性質はガンマ行列の具体的な表示を用いずに導かれているので，あらゆる表示で成り立つ*3)．ガンマ行列の 1 つの表示から，別の表示

$$\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^{-1} \tag{3.19}$$

に移ったとき，$\gamma^\mu = U^{-1}\gamma'^\mu U$, $(\gamma^\mu)^T = U^T(\gamma'^\mu)^T(U^{-1})^T$ であるから，これらを $C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu$ に代入すると，$CU^T(\gamma'^\mu)^T(U^{-1})^T C^{-1} = -U^{-1}\gamma'^\mu U$ となり，これを整理して

$$UCU^T(\gamma'^\mu)^T(UCU^T)^{-1} = -\gamma'^\mu \tag{4.17}$$

となる．したがって，この表示における荷電共役行列 $C'$ は，もとの $C$ から

$$C' = UCU^T \tag{4.18}$$

とすればよい．

*3) $C^* = -C$, $C^\dagger = -C$ のような表式を見かけることがあるが，これは特定の表示，かつ $C$ の位相の選び方による．

# 第 5 章
# ディラックスピノル

本章では，スピン 1/2 粒子の状態全体がどのような構造を持つかを述べ，それとディラック方程式の解との関係を与える．次に，素粒子反応の確率振幅の計算などに有用な，運動量固有状態のディラックスピノルが関わるさまざまな関係を導く．

## 5.1 スピン 1/2 粒子の状態空間

静止系では，スピン 1/2 の粒子は 2 つの独立なスピン状態をもつ．スピンの $z$ 成分 $S_z$ の固有状態 $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$ を独立な状態として選ぶと，一般の状態はこれらの線形結合で表せる．規格化して，全体の位相を適当に選ぶと，一般の状態を

$$|\theta\varphi\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle \tag{5.1}$$

($0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$) あるいは 2 成分スピノルで

$$\chi_{\theta\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

と表すことができる[*1)]．この状態のスピンの期待値を計算すると

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \tfrac{\hbar}{2}(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{5.3}$$

となる．これは，一般の状態がスピン期待値ベクトルの方向と 1 対 1 に対応していることを意味する．また，スピン期待値ベクトルは常に大きさ $\hbar/2$ であ

*1) この表式は $\theta = \pi$ では $\varphi$ は物理的に意味のない位相となっている．このことは，SU(2) と SO(3) が 1 対 2 対応していることと関係する．

る[*2)]．このように，スピン 1/2 の一般の状態を表すには，$\langle \boldsymbol{S} \rangle$ の向きを指定すればよい．このために，大きさ 1 の**スピンベクトル**

$$\boldsymbol{s} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{5.4}$$

を定義すると，状態 $\chi_{\theta\varphi}$ は，スピンの $\boldsymbol{s}$ 方向の成分の固有状態となっており，

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi_{\theta\varphi} = \chi_{\theta\varphi} \tag{5.5}$$

が成り立つ．これと独立なもう 1 つの $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ の固有状態は[*3)]

$$\chi_{\overline{\theta\varphi}} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

であり，

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi_{\overline{\theta\varphi}} = -\chi_{\overline{\theta\varphi}} \tag{5.7}$$

が成立する．この 2 つの状態は当然直交していて，$\boldsymbol{s}$ 方向をスピンの量子化軸に選んだときの独立な状態である．($\theta = 0$ に対し $\chi = \binom{0}{1}$ となるように位相を選んだ.）もちろんこの状態は，$\chi_{\theta\varphi}$ で角度を反対方向に選んだもの $\chi_{\pi-\theta,\varphi+\pi}$ と（位相を除き）同じ状態であり，$\chi_{\overline{\theta\varphi}} = -e^{-i\varphi}\chi_{\pi-\theta,\varphi+\pi}$ の関係にある．

スピン 1/2 の状態全体は，静止系から任意の方向に任意の速度でブーストすることにより構成できる．よって，独立な状態は，(3 次元）運動量の値，およびある定めた軸の向きのスピン成分の値の 2 つを指定することで与えられる．(すなわち，基底として $|\boldsymbol{p}, \pm\rangle$ の形の状態をとれる．独立な状態数はシンボリックに $2\times\infty^3$ である.）この状態全体は非斉次ローレンツ群（またの名をポアンカレ群）のユニタリな既約表現となっている．

## 5.2 任意の運動量・スピンの向きを持つディラックスピノル

前節で論じたスピン 1/2 粒子の状態に対応するディラックスピノルを，ディラック表示のガンマ行列を採用して具体的に求めよう．まず，静止したディラック粒子からはじめる．スピンベクトル $\boldsymbol{s}$ で表される状態に対応するスピノルは，

$$u(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{s}) = N_\circ \begin{pmatrix} \chi_{\theta\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

で与えられる．$(\theta, \varphi)$ はスピンベクトル $\boldsymbol{s}$ の方向である．以後，静止系スピノ

*2) この状況はスピン 1/2 粒子に特別であり，スピン 1/2 以上の粒子の状態を特定するには，スピンの期待値だけでは不十分である．(このことはスピン $J$ の粒子の状態空間が $4J$ 次元であることからも推測される.）言い換えると，最小のスピンである 1/2 に対しては，角運動量ベクトルの古典的なイメージがある意味で通用するという逆説的な状況が成立している．一方，スピン 1（以上）に対しては事態が異なり，量子力学に特徴的な状態，例えばスピンベクトルの期待値が 0 である状態などが存在する．

*3) $\theta = 0$ のとき $\chi = \binom{0}{1}$ となるように位相を選んだ．

ルに対する規格化因子 $N_\circ$ を $N_\circ = \sqrt{mc^2}$ と選ぶことにする[*4].

一般の運動量を持つ状態のスピノルは，これにローレンツ変換を施すことで求められる．運動量 $\boldsymbol{p}$ の状態は，$u(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{s})$ を $\boldsymbol{p}$ の方向にブーストして作ることができる[*5]．ローレンツ変換は行列 (3.53) で与えられるが，ここで $\gamma = E_{\boldsymbol{p}}/mc^2$, $\beta = |\boldsymbol{p}|c/E_{\boldsymbol{p}}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ ととって

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) &= N_\circ \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \begin{pmatrix} \chi_{\theta\varphi} \\ \dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi_{\theta\varphi} \end{pmatrix} \\
&= N_\circ \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2}{mc^2}} \begin{pmatrix} \chi_{\theta\varphi} \\ \dfrac{\boldsymbol{p}c \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} \chi_{\theta\varphi} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

となる．$\boldsymbol{s}$ の方向は静止系から変化していないことに注意する．規格化因子 $N_\circ$ を上のように選んで

$$
u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \begin{pmatrix} \chi_{\theta\varphi} \\ \dfrac{\boldsymbol{p}c \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} \chi_{\theta\varphi} \end{pmatrix} \tag{5.10}
$$

となる．この状態の規格化を計算すると，

$$
u^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = 2E_{\boldsymbol{p}} \,, \qquad \bar{u}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = 2mc^2 \tag{5.11}
$$

であるが，この結果は $u^\dagger u$ がベクトルの第 0 成分，$\bar{u}u$ がスカラーであることと一致しており，確かに相対論的に共変な規格化となっている．

これと独立なスピノル

$$
u(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}) = \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \begin{pmatrix} \chi_{\overline{\theta\varphi}} \\ \dfrac{\boldsymbol{p}c \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} \chi_{\overline{\theta\varphi}} \end{pmatrix} \tag{5.12}
$$

は，スピンが $-\boldsymbol{s}$ 方向の状態であり，$u(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}) = -e^{i\varphi} u(\boldsymbol{p}, -\boldsymbol{s})$ の関係にある．

スピノル $u$ はエネルギー・運動量が $p^\mu = (E_{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p})$ の固有値を持つディラック方程式の解を表し，従って

$$
(\gamma^\mu p_\mu - mc)\, u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = 0 \tag{5.13}
$$

をみたすが，これも上の具体的な表示を用いて確かめることができる．

負エネルギーのスピノルは，正エネルギースピノルから，関係

---

*4) こうしておくと，後に質量 0 の極限が有限になるようにできる．

*5) ある座標系を別のある座標系に移すローレンツ変換は一意的に決まるが，ある運動量ベクトル（あるいは任意の 4 次元ベクトル）を別の運動量ベクトル（あるいは大きさが同じ別の 4 次元ベクトル）に移す変換は無数に存在する．ここでは，運動量方向へのブーストと特定していることに注意が必要である．

$$v(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = C\bar{u}^T(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \tag{5.14}$$

によって定義できる．これに対しては (5.13) を用いて

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)\, v(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = 0 \tag{5.15}$$

が成立することを確かめられる．その具体的な形は，まず，$C$ に対し (4.6) を用いると，

$$\begin{aligned} v(\boldsymbol{p}, \overset{(}{}\bar{\boldsymbol{s}}\overset{)}{}) &= \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \begin{pmatrix} i\sigma_2 \dfrac{\boldsymbol{p}c \cdot \boldsymbol{\sigma}^*}{E + mc^2} \chi_{(\overline{\theta\varphi})}{}^* \\ -i\sigma_2 \chi_{(\overline{\theta\varphi})}{}^* \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{p}c \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} (-i\sigma_2) \chi_{(\overline{\theta\varphi})}{}^* \\ (-i\sigma_2) \chi_{(\overline{\theta\varphi})}{}^* \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.16}$$

となる．2 行目への変形は $\sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2 = -\sigma_i$ を用いた．ここで，

$$-\, i\sigma_2 (\chi_{\theta\varphi})^* = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \chi_{\overline{\theta\varphi}}, \tag{5.17a}$$

$$-\, i\sigma_2 (\chi_{\overline{\theta\varphi}})^* = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = -\chi_{\theta\varphi} \tag{5.17b}$$

が成り立つことを用いると，最終的に

$$v(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{p}c \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} \chi_{\overline{\theta\varphi}} \\ \chi_{\overline{\theta\varphi}} \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

$$v(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}) = \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \begin{pmatrix} -\dfrac{\boldsymbol{p}c \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + mc^2} \chi_{\theta\varphi} \\ -\chi_{\theta\varphi} \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

と求められる．

言うまでもないが，これらのスピノルに対応する状態のうち，異なる運動量 $\boldsymbol{p}$ の状態はすべてお互いに独立である．各 $\boldsymbol{p}$ に対し，独立なスピン状態は 2 つ存在するが，その選び方として（静止系で）$\boldsymbol{s}$ の方向のスピン成分の固有状態をとると，それが上の $\boldsymbol{s}$ と $\bar{\boldsymbol{s}}$ のスピノルに対応する．

1.4 節で議論したヘリシティ固有状態のスピノルは，$\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{p}$ の方向と一致させたものである．この場合は，$p = |\boldsymbol{p}|$ として $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \chi_{\theta\varphi} = p\, \chi_{\theta\varphi}$ および $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \chi_{\overline{\theta\varphi}} = -p\, \chi_{\overline{\theta\varphi}}$ が成立するので，スピノルの表式は

$$u_+(\boldsymbol{p}) = \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \begin{pmatrix} \chi_{\theta\varphi} \\ \dfrac{pc}{E+mc^2}\chi_{\theta\varphi} \end{pmatrix}, \tag{5.20a}$$

$$u_-(\boldsymbol{p}) = \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \begin{pmatrix} \chi_{\overline{\theta\varphi}} \\ -\dfrac{pc}{E+mc^2}\chi_{\overline{\theta\varphi}} \end{pmatrix}, \tag{5.20b}$$

$$v_+(\boldsymbol{p}) = \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \begin{pmatrix} -\dfrac{pc}{E+mc^2}\chi_{\overline{\theta\varphi}} \\ \chi_{\overline{\theta\varphi}} \end{pmatrix}, \tag{5.20c}$$

$$v_-(\boldsymbol{p}) = \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + mc^2} \begin{pmatrix} -\dfrac{pc}{E+mc^2}\chi_{\theta\varphi} \\ -\chi_{\theta\varphi} \end{pmatrix} \tag{5.20d}$$

と表せる．ただし，ここでは $(\theta, \varphi)$ は $\boldsymbol{p}$ の方向であることに注意する．

## 5.3 スピノルに対する射影子

次に，このスピノルに対する射影子を定義するが，これらは，断面積や崩壊幅の計算に有用である．

一般に，**射影子** $P$ とは関係 $P^2 = P$ をみたすもので，線形空間からその部分空間を取り出す（部分空間に射影する）演算子である．$P^2 = P$ であることは，$P^n = P$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ であり，$P$ を一度作用させると，その後何度作用させても変わらないことを意味する．まず射影子の一般的な性質を整理しておこう．$P$ に対して $\bar{P} = 1 - P$ とすると，

$$\bar{P}^2 = (1-P)^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - 2P + P = 1 - P = \bar{P} \tag{5.21}$$

であるから，$\bar{P}$ も 1 つの射影子となっている．この 2 つは

$$P\bar{P} = P(1-P) = P - P^2 = P - P = 0\,, \qquad \bar{P}P = 0 \tag{5.22}$$

と相補的な射影子となっており，当然 $P + \bar{P} = 1$ である．線形空間の任意のベクトル $w$ は

$$w = (P + \bar{P})w = Pw + \bar{P}w \tag{5.23}$$

という和の形に書けるが，$u = Pw$, $v = \bar{P}w$ と定義すると，

$$w = u + v, \tag{5.24}$$

$$Pu = u\,, \qquad \bar{P}u = 0, \tag{5.25}$$

$$Pv = 0\,, \qquad \bar{P}v = v \tag{5.26}$$

となる．これが相補的と言った正確な意味であり，任意のベクトルが $P$ による射影と $\bar{P}$ による射影の 2 つの和に分解できることになる．線形空間も 2 つの部分空間の直和となる．

この 2 つの部分空間は，必ずしもお互いに直交していない．もし，直交していたとすると，任意の $w_1, w_2$ に対し，内積 $(\bar{P}w_1, Pw_2)$ が 0 にならなければならないが，一方これは

$$\begin{aligned}(\bar{P}w_1, Pw_2) &= ((1-P)w_1, Pw_2) = (w_1, (1-P^\dagger)Pw_2) \\ &= (w_1, (P - P^\dagger P)w_2)\end{aligned} \tag{5.27}$$

と書けるので，これが常に 0 になるためには $P^\dagger P = P$ でなければならない．この関係のエルミート共役を取ると $P^\dagger P = P^\dagger$ なので，結局 $P = P^\dagger$ が導かれる．逆に，$P$ がエルミートならば上の内積が 0 になることは $P^2 = P$ を用いて示される．このように，射影子がエルミートであることが，2 つの部分空間が直交する必要十分条件である．しかし，今後取り扱うスピノルの射影子の場合は必ずしもエルミートではない．

さて，話を具体的にして，スピノルに対する射影子に移る．まず，静止系スピノルに対しては，正エネルギースピノルを抽出する射影子が上 2 成分への射影 $(1+\gamma^0)/2$ で与えられる．これを一般の運動量に対して拡張するため，まずこれをローレンツ共変な形に書いてみる．静止系の運動量ベクトルが $p^\mu = (mc, \mathbf{0})$ で与えられることに注意すると，

$$\frac{1+\gamma^0}{2} = \frac{1+\gamma^\mu p_\mu/mc}{2} = \frac{mc + \gamma{\cdot}p}{2mc} \tag{5.28}$$

と共変な形に書き直せる．まず，これが一般の（$p^2 = m^2c^2$ をみたす） $p^\mu$ に対しても射影子の性質を持っていることを確かめるには，

$$(mc + \gamma{\cdot}p)^2 = m^2c^2 + 2mc\gamma{\cdot}p + (\gamma{\cdot}p)^2 \tag{5.29}$$

において，

$$(\gamma{\cdot}p)^2 = \gamma^\mu\gamma^\nu p_\mu p_\nu = (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})p_\mu p_\nu = p^2 \tag{5.30}$$

に着目すると，$p^2 = m^2c^2$ である限り確かに

$$\left(\frac{mc + \gamma{\cdot}p}{2mc}\right)^2 = \frac{mc + \gamma{\cdot}p}{2mc} \tag{5.31}$$

が成立することがわかる．

これが一般の運動量の場合に対して正しい正エネルギースピノルへの射影子になっているかどうかを確認するため，実際に $u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})$ に作用させてみる．まず，$\gamma{\cdot}p\,u = mcu$ (5.13) を用いると，

$$\frac{mc + \gamma{\cdot}p}{2mc}u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \tag{5.32}$$

が成り立っている．また，負エネルギーのスピノルに対しては

$$\frac{mc+\gamma\cdot p}{2mc}v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=\frac{mc-mc}{2mc}v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=0 \tag{5.33}$$

となる．したがって，

$$P_{+}^{(\boldsymbol{p})}=\frac{mc+\gamma\cdot p}{2mc} \tag{5.34}$$

は確かに正エネルギースピノルに対する射影子である．負エネルギースピノルに対する射影子は逆に

$$P_{-}^{(\boldsymbol{p})}=1-P_{+}^{(\boldsymbol{p})}=\frac{mc-\gamma\cdot p}{2mc} \tag{5.35}$$

で与えられる．これらの性質はスピノルに対するディラック方程式だけから導けるので，射影子の形 (5.34), (5.35) はガンマ行列の具体的な表示によらないこともわかる．

次に，スピン状態 $\boldsymbol{s}$ への射影子を定義する．まず，2 成分の（パウリ）スピノルについて見ると，一般の状態から，(5.2) で与えた状態 $\chi_{\theta\varphi}$ の成分を取り出す射影子は，(5.5) に着目すると，

$$\frac{1+\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\chi_{\theta\varphi}=\chi_{\theta\varphi},\qquad \frac{1+\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\chi_{\overline{\theta\varphi}}=0 \tag{5.36}$$

で与えられることがわかる．これを 4 行 4 列に拡張するには，行列 $\sigma$ を

$$\Sigma_i=\tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^{jk}=\begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix} \tag{5.37}$$

とするか，

$$-\gamma_5\gamma^i=\gamma_5\gamma_i=\begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & -\sigma_i\end{pmatrix} \tag{5.38}$$

とするかがまず考えられる．一方，スピンベクトル $\boldsymbol{s}$ は，静止系において，4 次元ベクトル

$$s^\mu=(0,\boldsymbol{s}) \tag{5.39}$$

の空間成分とみなすと，性質 $p\cdot s=0,\ s^2=-1$ をみたすが，一般の運動量状態に対しては，これをローレンツ変換して 4 次元スピンベクトルを定義することにする．これと整合性を保つには，$\boldsymbol{\sigma}$ を $-\gamma_5\boldsymbol{\gamma}$ の上 2 成分とみなす方を選べば，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{s}\longrightarrow+\gamma_5\gamma^\mu s_\mu$ と拡張でき，スピン状態 $s^\mu$ への射影子として

$$P_R^{(s)}=\frac{1+\gamma_5\gamma\cdot s}{2} \tag{5.40}$$

が候補となる．

まず，これが射影子になっていることは，

$$
\begin{aligned}
\left(P_R^{(s)}\right)^2 &= \frac{1+2\gamma_5\gamma\cdot s+\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5\gamma^\nu s_\mu s_\nu}{4} \\
&= \frac{1+2\gamma_5\gamma\cdot s-\gamma^\mu\gamma^\nu s_\mu s_\nu}{4} \\
&= \frac{1+2\gamma_5\gamma\cdot s-s^2}{4}
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

となるので，$s^2=-1$ を用いてこれが $P_R^{(s)}$ に等しいことがわかる．これと相補的な射影子は

$$
P_L^{(s)} = 1-P_R^{(s)} = \frac{1-\gamma_5\gamma\cdot s}{2} \tag{5.42}
$$

なので，一般論よりこれらは性質

$$
P_R^{(s)}P_L^{(s)} = 0, \tag{5.43}
$$

$$
P_R^{(s)}+P_L^{(s)} = 1 \tag{5.44}
$$

をみたしている．

実際に $P_R^{(s)}$ がスピンベクトル $\boldsymbol{s}$ の状態への正しい射影になっていることは次のようにして確かめられる．まず，静止系のスピノルに対し，$s_\circ^\mu=(0,\boldsymbol{s})$ とすると，

$$
\frac{1+\gamma_5\gamma\cdot s_\circ}{2}u(\boldsymbol{0},\boldsymbol{s}) = u(\boldsymbol{0},\boldsymbol{s}) \tag{5.45}
$$

が成立することは，(5.36), (5.8), (5.38) よりわかる．この式にスピノルに対するローレンツ変換行列 $S$ を作用させる．ここでは，$\boldsymbol{p}$ 方向へ $\beta=|\boldsymbol{p}|c/E_{\boldsymbol{p}}$ に相当するブーストに対応する $S$ をとる．スピノル $u$ が $Su(\boldsymbol{0},\boldsymbol{s})=u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ となることは前節で見たので，

$$
\frac{1+S\gamma_5\gamma_\mu S^{-1}s_\circ^\mu}{2}u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{5.46}
$$

が成り立つ．順時正規ローレンツ変換は，$S=\exp(-\frac{1}{4}\theta_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})$ という形をしているので，$S\gamma_5S^{-1}=\gamma_5$ であり，また，(3.25) により $\Lambda^\nu{}_\mu S\gamma^\mu S^{-1}=\gamma^\nu$ が成り立つことから $S\gamma_\mu S^{-1}=\Lambda^\nu{}_\mu\gamma_\nu$ が導けるので，

$$
S\gamma_\mu S^{-1}s_\circ^\mu = \gamma_\nu\Lambda^\nu{}_\mu s_\circ^\mu. \tag{5.47}
$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$ はベクトルに対するローレンツ変換を表すので $\Lambda^\nu{}_\mu s_\circ^\mu=s^\nu$ であり，これらをまとめると

$$
\frac{1+\gamma_5\gamma\cdot s}{2}u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{5.48}
$$

が言える．これより

$$
\frac{1-\gamma_5\gamma\cdot s}{2}u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = 0 \tag{5.49}
$$

も成り立つ．$u(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})$ に対しては，

$$\frac{1+\gamma_5\gamma\cdot s}{2}u(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})=0, \tag{5.50}$$

$$\frac{1-\gamma_5\gamma\cdot s}{2}u(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})=u(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) \tag{5.51}$$

である．また，$P_L^{(s)}$ は $P_R^{(s)}$ の $s$ の向きを逆にしたものなので，スピンが逆向きの成分に対する射影子となる．

次に，負エネルギースピノルについて見てみる．定義 (5.14) に従って，まず $u$ に対する式 (5.48) のエルミート共役を取ると，

$$u^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\frac{1+\gamma^\dagger\cdot s\gamma_5^\dagger}{2}=u^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\ . \tag{5.52}$$

これに右から $\gamma^0$ をかけて，

$$\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\frac{1-\gamma\cdot s\gamma_5}{2}=\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\ . \tag{5.53}$$

転置を取り

$$\frac{1-\gamma_5^T\gamma^T\cdot s}{2}\bar{u}^T(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=\bar{u}^T(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\ . \tag{5.54}$$

左から行列 $C$ をかけて

$$\frac{1+\gamma_5\gamma\cdot s}{2}v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{5.55}$$

を得る．このように，$v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ は $u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ と同じスピン射影子によって取り出される．

ここで，特にスピンベクトルが運動量ベクトルと平行である場合を考えよう．この場合は $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{s}$ の定数倍なので，スピノルはちょうど第 1 章で取り扱ったヘリシティの固有状態に一致する．このときの $\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{s}_\pm=\pm\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ と書ける．高エネルギーもしくは質量 0 の極限 $E_{\boldsymbol{p}}\gg mc^2$ でスピン射影子がどのようにふるまうかを見てみる．4 次元スピンベクトルを静止系における $(0,\boldsymbol{s}_\pm)$ からローレンツ変換を施して求めると，この極限では

$$s_\pm^\mu=\pm\frac{p^\mu}{mc}+\mathcal{O}\Big(\frac{mc^2}{E_{\boldsymbol{p}}}\Big) \tag{5.56}$$

と書ける．これをスピン射影子に代入すると

$$\frac{1+\gamma_5\gamma\cdot s_\pm}{2}u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=\frac{1\pm\gamma_5}{2}u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})+\mathcal{O}\Big(\frac{mc^2}{E_{\boldsymbol{p}}}\Big) \tag{5.57}$$

となる．ただしディラック方程式 $\gamma\cdot p\,u=mc\,u$ を用いた．つまり，この極限では，ヘリシティの射影子は後で述べるカイラル射影子（$\gamma_5$ の固有空間への射影）に一致する．

このように，$P_+^{(\boldsymbol{p})}$ と $P_-^{(\boldsymbol{p})}$，および $P_R^{(s)}$ と $P_L^{(s)}$ は，それぞれ 4 次元のディラックスピノル空間を相補的な 2 次元ずつに射影する性質を持つことがわかっ

た．これらエネルギー射影子とスピン射影子はお互いに可換

$$P_{\pm}^{(\boldsymbol{p})} P_{R,L}^{(s)} = P_{R,L}^{(s)} P_{\pm}^{(\boldsymbol{p})} \tag{5.58}$$

である．これは，$\gamma{\cdot}p\,\gamma{\cdot}s = 2p{\cdot}s - \gamma{\cdot}s\,\gamma{\cdot}p$ に注意して，$p{\cdot}s = 0$ であることを用いると導ける．これより，4 つの独立なスピノル $u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$, $u(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})$, $v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$, $v(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})$ のうち，1 つだけを取り出す射影子が

$$P_{+}^{(\boldsymbol{p})} P_{R}^{(s)} u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{5.59}$$

のように 4 つ定義できる．これらにより，4 次元のスピノル空間は各 1 次元の部分空間に切り分けられる．

これらの射影子は，エルミートでないことには注意が必要である*6)．従って，ディラックスピノルのエルミート共役に対しては，これらの射影子は用いることができない．一方，ディラック共役に対しては，

$$\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \frac{mc + \gamma{\cdot}p}{2mc} = \bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}), \tag{5.60}$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \frac{1 + \gamma_5 \gamma{\cdot}s}{2} = \bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{5.61}$$

等が成り立つ．これはローレンツ共変性を考えると自然な結論である．このことから，ディラックスピノルの直交性として，

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = \bar{u}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})u(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) = 2mc^2\ ,\\
&\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})u(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) = \bar{u}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = 0\ ,\\
&\bar{v}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = \bar{v}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})v(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) = -2mc^2\ ,\\
&\bar{v}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})v(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) = \bar{v}(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = 0\ ,\\
&\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}') = \bar{v}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}') = 0
\end{aligned} \tag{5.62}$$

が得られる．(これらは異なる射影子の積が 0 になることから直ちに導ける.) また，4 つのスピノルの完全性を表す式として

$$\begin{aligned}
&u_\alpha(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\bar{u}_\beta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) + u_\alpha(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})\bar{u}_\beta(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})\\
&\quad - v_\alpha(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\bar{v}_\beta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) - v_\alpha(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})\bar{v}_\beta(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) = 2mc^2\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{5.63}$$

が成り立つ．

これら射影演算子がどのように使われるかを少し述べておく．反応の初期状態あるいは終状態に電子などのスピン 1/2 粒子がある場合，散乱振幅にはそれに対応したディラックスピノルが現れる．散乱振幅の絶対値 2 乗をとると，例えば

---

*6) 静止系でのみ例外的にエルミートである．このため，これらの射影子は静止系以外では直交する部分空間への射影になっていない斜交射影子である．このことは，ローレンツ変換がユニタリーでないことの反映である．

$$\cdots \Gamma u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\bar{\Gamma}\cdots \tag{5.64}$$

のような形になる．ここで，射影演算子を用いて，完全性を使うと

$$\begin{aligned}
u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) &= \frac{mc+\gamma{\cdot}p}{2mc}\frac{1+\gamma_5\gamma{\cdot}s_\pm}{2}u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \\
&= \frac{mc+\gamma{\cdot}p}{2mc}\frac{1+\gamma_5\gamma{\cdot}s_\pm}{2}\sum_{\pm s}\big(u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})-v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\bar{v}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\big) \\
&= \frac{mc+\gamma{\cdot}p}{2mc}\frac{1+\gamma_5\gamma{\cdot}s_\pm}{2}\times 2mc^2 \\
&= (mc+\gamma{\cdot}p)c\,\frac{1+\gamma_5\gamma{\cdot}s_\pm}{2}
\end{aligned} \tag{5.65}$$

と書き直せ，これをすべての粒子について行うと，振幅をガンマ行列のトレースの形にもっていくことができる．終状態のスピンの向きが観測されない場合，あるいは初期状態でスピンの偏極がない場合に，スピンの和または平均をとると，

$$\sum_{\pm s} u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = (\gamma{\cdot}p+mc)c \tag{5.66}$$

とでき（平均の場合は 1/2 倍），反粒子の場合は同様に

$$\sum_{\pm s} v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\bar{v}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = (\gamma{\cdot}p-mc)c \tag{5.67}$$

となる．

これらの関係式に現れるスピノル $v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ は，負エネルギー解として見た場合には，運動量 $-\boldsymbol{p}$ の解であることに注意する．運動量 $\boldsymbol{p}$ の正負エネルギー解の間に成り立つ類似の関係は，$\bar{u}$ でなく $u^\dagger$ を含み，直交性

$$\begin{aligned}
&u^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = u^\dagger(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})u(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) = 2E_{\boldsymbol{p}}\,, \\
&u^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})u(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) = u^\dagger(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = 0\,, \\
&v^\dagger(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})v(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = v^\dagger(-\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})v(-\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) = -2E_{\boldsymbol{p}}\,, \\
&v^\dagger(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})v(-\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) = v^\dagger(-\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})v(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = 0\,, \\
&u^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})v(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}') = v^\dagger(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}') = 0
\end{aligned} \tag{5.68}$$

および完全性

$$\begin{aligned}
&u_\alpha(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})u^\dagger_\beta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) + u_\alpha(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})u^\dagger_\beta(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) \\
&\quad + v_\alpha(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})v^\dagger_\beta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) + v_\alpha(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}})v^\dagger_\beta(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{s}}) = 2E_{\boldsymbol{p}}\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{5.69}$$

となる．この関係はのちに第 8 章で用いる．

# 第 6 章
# 量子場の理論とディラック場

ディラック方程式を電子の相対論的量子力学的波動関数として扱う方法は，非相対論極限に対して相対論的な効果を取り入れる方法としてはきわめて有効であるが，運動エネルギーが質量エネルギーと同等以上になると通用しない．このような領域では粒子数を固定した定式化では不十分で，粒子数が変化する過程を取り入れることなどが必要になる．そのためには量子化されたディラック場を用いることになるが，量子場の理論を展開する紙数はないので，詳しくは場の理論の教科書に譲り，この章では波動関数と量子場の関係を中心に簡単にまとめる．

## 6.1 量子場

通常の非相対論的量子力学では，系を記述するハミルトニアンやそれが作用する状態空間は，粒子数が最初から決まっており変化しない．電磁場（光子）の量子力学的記述や，質量エネルギーを超えるエネルギーが関与する相対論的な領域における，電子などの記述には，粒子の生成・消滅，つまり粒子数が変化することを許す理論的枠組が必要である．粒子数が変化しうるということは，粒子数 0 から無限大までの状態をすべて取り扱わなければならない．このような系は無限大の自由度を持っているので，無限自由度の系の量子力学が必要ということになる．

このような系を扱う理論的枠組として，量子場理論がある．場とは，空間の各点に力学的自由度を持つ系であり，なじみの深いものとしては例えば電磁場が挙げられる．古典電磁気学では，電磁場に対する運動方程式はマックスウェル方程式である．真空中（電荷のない空間）のマックスウェル方程式は解くことができ，その解は電磁波である．無限空間において，電磁場の一般解はあらゆる波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を持つ平面波の重ね合わせとして書くことができる．(対応する振動数 $\omega$ は，波数ベクトルの大きさに光速をかけたものとなる.)

電磁場中の荷電粒子のシュレーディンガー方程式においては，電磁場の自由度は電磁ポテンシャル $A^\mu$ を用いて表されるが，それと同様に，基本的な力学的自由度として $A^\mu$ を採用する．古典論では，電磁場は実数値をとる関数であるが，量子化された電磁場は，マックスウェル方程式に従う点では古典論と同じであるが，状態空間に作用する演算子であり，光子をつくったり消したりする作用をもち，粒子数の異なる状態空間を結ぶ役割を果たす．

ディラック方程式についても同様で，真に相対論的な領域では，1 電子の系を考えること自身が意味を失う．いわゆる「相対論的量子力学」は，場の量子化に立ち入ることなく，ディラック方程式を 1 体問題として扱える範囲に絞って議論を行うが，これはきわめて中途半端であり，ディラック方程式の真価を味わうには量子化されたディラック場を避けて通れない．

本書は場の量子論を詳細に論ずる紙数もなく，その場でもないので，以下では場の演算子の意味，相対論的な量子場理論の枠組について簡単に述べるにとどめ，量子化されたディラック場について記述する．

## 6.2 場の演算子

1 粒子の系の量子力学では，状態 $|\alpha\rangle$ の波動関数 $\psi_\alpha(\boldsymbol{x})$ は

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}|\alpha\rangle \tag{6.1}$$

と表すことができる．この粒子の量子場 $\hat{\psi}(\boldsymbol{x})$ は，

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{x}) = \langle 0|\hat{\psi}(\boldsymbol{x})|\alpha\rangle \tag{6.2}$$

と書くことのできるような演算子である．ここで，状態 $|0\rangle$ は，粒子の存在しない状態であり，真空と呼ばれる．これより

$$|\boldsymbol{x}\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})|0\rangle \tag{6.3}$$

であり，演算子 $\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})$ は粒子を位置 $\boldsymbol{x}$ につくるという作用を持つ演算子であり，$\hat{\psi}(\boldsymbol{x})$ は粒子を消す作用を持つ演算子ということになる．量子力学においては $\boldsymbol{x}$ は位置の演算子であるが，量子場 $\hat{\psi}(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x}$ は位置を表すパラメータとなり，演算子は各 $\boldsymbol{x}$ における $\hat{\psi}$ である．真空に $\hat{\psi}^\dagger$ を何度も作用させると 2 粒子以上の系をつくることができ，量子場によって書かれたハミルトニアンはさまざまな粒子数の状態を総合的に記述する手段を与える．

相対論的な量子場の理論では，相対論的不変性および因果律によってさまざまな制約が課せられる．まず，状態の時間発展を記述するには，上の例ではシュレーディンガー描像で

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t) = \langle 0|\hat{\psi}(\boldsymbol{x})|\alpha(t)\rangle \tag{6.4}$$

と書けるが，これでは $\boldsymbol{x}$ と $t$ の間の対称性が非常に見づらいので，ハイゼンベルク描像を用いることにすると，演算子 $\hat{\psi}$ が時間依存性も持ち，

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t) = \langle 0|\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)|\alpha\rangle \tag{6.5}$$

のように，相対論的不変性を議論しやすい形となる*1)．

最も単純な相対論的な場は，スピンを持たない粒子に対応するスカラー場 $\varphi(x)$ なので，以下これを例にとって述べることにする．と，まず，$\varphi(x)$ はローレンツ変換に対しスカラー密度として変換する．

$$x^\mu \to x'^\mu \quad \text{のとき} \quad \varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x) \tag{6.6}$$

質量 $m$ のスピンを持たない粒子は相対論的なエネルギーと運動量の関係

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4 \tag{6.7}$$

をみたし，これを表すのがクライン－ゴルドン方程式の解

$$e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_{\boldsymbol{p}}t)/\hbar} = e^{-ip\cdot x/\hbar} \tag{6.8}$$

であった．この解を用いて $\varphi(x)$ を展開する．いま $\varphi(x)$ は実であるとすると

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \left[a(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x/\hbar} + a^*(\boldsymbol{p})e^{+ip\cdot x/\hbar}\right] \tag{6.9}$$

と書ける．ここで，積分 $d^3p$ に $1/2E_{\boldsymbol{p}}$ の因子を含めたが，これは $d^3p$ だけでは相対論的に不変な要素にならないからである．$d^3p$ は空間回転に対しては明らかに不変であるが，ブーストのもとでは変化する．これは 3 次元体積要素がローレンツ収縮のために変化するのと同様である．実際，$z$ 方向に速度 $\beta$ でブーストしてみると，エネルギー・運動量の変換は $p'_z = \gamma(p_z + \beta E/c)$, $E' = \gamma(E + \beta p_z c)$ となり，$dp'_z = \gamma(1 + \beta dE/dp_z c)\, dp_z$ である．これは $dE/dp_z = p_z c^2/E$ を用いて，$dp'_z = (E'/E)dp_z$ と書き直せるので，$dp_z/E$ が不変，従って $d^3p/E$ も不変となる．

このことは，

$$\frac{d^3p}{2E_{\boldsymbol{p}}} = c^{-1}\, d^4p\, \delta(p^2 - m^2c^2)\, \theta(p^0) \tag{6.10}$$

と書けて，右辺が明らかに相対論的に不変であることからもわかる．この式中の $\theta(x)$ はステップ関数

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{6.11}$$

であり，デルタ関数の 2 つのゼロ点のうち $p^0 > 0$ のもののみが効くことを意

*1)　真空はエネルギー 0 のハミルトニアンの固有状態で，シュレーディンガー描像の状態とハイゼンベルク描像の状態が一致する．

味する．

このように展開すると，$e^{\pm ip\cdot x}$ もローレンツスカラー量なので，$a(\boldsymbol{p})$ はローレンツ変換のもとで $a(\boldsymbol{p}) \to a(\boldsymbol{p}')$ と共変に変換する．

ここで $\varphi(x)$ を場の演算子 $\hat{\varphi}(x)$ と解釈するには，$a(\boldsymbol{p})$ および $a^*(\boldsymbol{p})$ を，それぞれ運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子を消す演算子（**消滅演算子**），作る演算子（**生成演算子**）とみなすとよい.（実場 $\varphi$ に対応する演算子はエルミート演算子となる．$a^*$ の代わりに $a^\dagger$ と書く.）真空 $|0\rangle$ は性質 $a(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0$ をみたす状態であり，真空に生成演算子 $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ を作用させた状態 $a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ粒子が 1 つある状態となる．この状態の規格化は，$a^\dagger(\boldsymbol{p})$ が共変な量であることから相対論的に共変な規格化になっているはずである．したがって定数倍を除き

$$\langle \boldsymbol{p}'|\boldsymbol{p}\rangle = (2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}) \tag{6.12}$$

となる．これは生成・消滅演算子の間の交換関係式として

$$[a(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{p}')] = (2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}) \tag{6.13}$$

としたことに対応する．1 粒子状態に対して運動量の固有状態が完全系をなすことは，

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\,|\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{p}| = 1 \tag{6.14}$$

により表現される.（この両辺を状態 $|\boldsymbol{p}'\rangle$ に作用させれば，確かに $|\boldsymbol{p}'\rangle = |\boldsymbol{p}'\rangle$ となる.）

状態 $|\boldsymbol{p}\rangle$ の波動関数は

$$\langle 0|\hat{\varphi}(x)|\boldsymbol{p}\rangle = e^{-ip\cdot x/\hbar} \tag{6.15}$$

により得られる.（ここで $\langle 0|a^\dagger(\boldsymbol{p}) = 0$ に注意する.）

量子場 $\hat{\varphi}(x)$ が真空に作用して作られる状態は，時刻 $t=0$ で

$$|\boldsymbol{x}_R\rangle \equiv \hat{\varphi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\,e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}|\boldsymbol{p}\rangle \tag{6.16}$$

であるが，内積を計算すると

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}'_R|\boldsymbol{x}_R\rangle &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}'}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\,e^{i(\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})/\hbar}\langle\boldsymbol{p}'|\boldsymbol{p}\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\,e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})/\hbar}\end{aligned} \tag{6.17}$$

となる．ここで $E_{\boldsymbol{p}}$ を定数で置き換えるとデルタ関数 $\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})$ となるが，$E_{\boldsymbol{p}}$ の $\boldsymbol{p}$ 依存性のため，完全にデルタ関数にはならない．非相対論的な近似 $E_{\boldsymbol{p}} \simeq mc^2$ ではデルタ関数になるので，この状態のひろがりは距離 $\hbar/mc$（コンプトン波長）の程度であることが推論される．場 $\varphi(x)$ の定義において，分母の $E_{\boldsymbol{p}}$ を $E_{\boldsymbol{p}}^{1/2}$ で置き換えれば，場の生成する状態は局在するが，そうすると

$\varphi(x)$ がローレンツスカラーでなくなってしまう．このように，状態 $|\boldsymbol{x}_R\rangle$ が完全に局在した状態でなくなってしまうことは，相対論的共変性の帰結である．

交換関係式 (6.13) に加えて，消滅演算子同士，生成演算子同士の交換関係式を

$$[a(\boldsymbol{p}), a(\boldsymbol{p}')] = [a^\dagger(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{p}')] = 0 \tag{6.18}$$

とする．2 粒子状態や多粒子状態は，真空に生成演算子を 2 つ以上作用させて作ることができるが，生成演算子同士が可換であることは，この粒子がボーズ統計に従うことを意味している．

## 6.3 ラグランジアン密度と場の方程式

相対論的不変性をもつ場の力学は，場によって書かれた作用を与えることによって定義される．作用 $S$ はラグランジアン $L$ の時間積分であるが，ラグランジアンをさらに**ラグランジアン密度**の空間積分として書く．

$$S = \int dt\, L(t) = \int dt\, d^3x \mathcal{L}(x). \tag{6.19}$$

ラグランジアン密度は，時空点 $x$ における場の汎関数として与えられる．

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\big(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)\big). \tag{6.20}$$

ここで $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ とした．複数の種類の粒子の存在する系では，それぞれの粒子に対応する場によってラグランジアン密度が構成される．図式的に $\varphi_i$ と書けば，

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\big(\varphi_i(x), \partial_\mu \varphi_i(x)\big). \tag{6.21}$$

作用 $S$ が相対論的不変性をもつには，ラグランジアン密度がローレンツスカラーであればよい．スピンを持つ粒子の場（ディラック場 $\psi$，ベクトル場 $A^\mu$ など）が含まれていたり，場の微分が含まれれば，それ自身はスカラーでないので全体がスカラーになるように構成することが必要である．

場の運動方程式は，変分原理によって導出される．$\delta S/\delta\varphi_i = 0$ から

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta(\partial_\mu \varphi_i(x))} - \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \varphi_i(x)} = 0 \tag{6.22}$$

なる相対論的に共変な方程式が得られる．この方程式は**オイラー・ラグランジュ方程式**とも呼ばれる．

ハミルトニアンは，ラグランジアンと同様に，**ハミルトニアン密度**の空間積分として表される．まず，場に対する正準運動量に相当する量（正準共役場と呼ぶ）を

$$\pi_i(x) = \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\dot{\varphi}_i(x)} \tag{6.23}$$

($\dot{\varphi}_i = \partial\varphi_i/\partial t$) と定義し，これを用いてハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H}(x) = \sum_i \pi_i(x)\dot{\varphi}_i(x) - \mathcal{L}(x) \tag{6.24}$$

と定義される．

## 6.4 スカラー場

（自由）スカラー場の場合，ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\left[\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \kappa^2\varphi^2\right] \tag{6.25}$$

($\kappa = mc/\hbar$) と定義される．これから場の運動方程式を求めると

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x) + \kappa^2\varphi(x) = 0 \tag{6.26}$$

というクライン・ゴルドン方程式が導かれる．また，$\pi(x) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial t}$ で，ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^2}\dot{\varphi}^2 + \left(\nabla\varphi\right)^2 + \kappa^2\varphi^2\right] \tag{6.27}$$

となる．いままでは $\varphi$ の規格化は任意であったが，ハミルトニアンがエネルギーの次元を持つためには，$\varphi$ の表式 (6.9) に $c\hbar^{-1/2}$ をかけておけばよいことがわかる．そうしたのち，(6.9) を (6.27) に代入し空間積分して，長いが一本道の計算を行うと，

$$H = \frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\,E_{\boldsymbol{p}}\Big(a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})\Big) \tag{6.28}$$

に到達する．この第 2 項は真空 $|0\rangle$ に作用させても消えないので，交換関係式より

$$a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p}) = a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + (2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^3(0) \tag{6.29}$$

を用いると，

$$H = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\,E_{\boldsymbol{p}}\,a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + \tfrac{1}{2}\int d^3p\,E_{\boldsymbol{p}}\,\delta^3(0). \tag{6.30}$$

この第 2 項はゼロ点エネルギーに相当する発散量であるが[*2)]，任意の状態のエネルギーを真空のエネルギーを基準に測ることにすれば，これを差し引くこと

*2) この発散のうち $(2\pi)^3\delta^3(0)$ は全空間の体積に相当するものであり，仮に有限体積で場に適当な境界条件をつけて計算すれば発散しない．しかし，モードが無限個あるため，すべてのモードの和（無限体積の場合は運動量積分）を取ると発散している．

ができる．残りの表式

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} E_{\boldsymbol{p}}\, a^\dagger(\boldsymbol{p}) a(\boldsymbol{p}) \tag{6.31}$$

は，1粒子状態 $|p\rangle$ に作用させると $H|p\rangle = E_{\boldsymbol{p}}|p\rangle$ と期待されるエネルギー固有値を与える[*3]．

また，場とその正準共役場の同時刻交換関係 $[\varphi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{x}',t)]$ を同様に (6.9) および生成消滅演算子の交換関係式 (6.13), (6.18) を用いて計算すると，

$$[\varphi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{x}',t)] = i\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{6.32}$$

という正準交換関係が得られる．場の正準量子化の枠組では，通常この関係を量子化の出発点とする．

ディラック方程式と同様，$\varphi$ の従うクライン・ゴルドン方程式には負エネルギー解が存在するが，場の展開の負エネルギー解の部分には粒子の生成演算子が付随している．第 4 章の解釈では，負エネルギー解は反粒子の波動関数の複素共役であったが，ここでは粒子それ自身の波動関数の複素共役となっている．つまり，ここで扱っている粒子は，反粒子が自分自身に等しい粒子ということになる．(例えば光子はそのような粒子である.) これは，実の場（演算子としてはエルミート場）を考えているためであり，エルミートでない場（複素場）を考えると，粒子と反粒子が異なる場合を記述できる．場の展開は，(6.9) の代わりに

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \left[ a(\boldsymbol{p}) e^{-ip\cdot x/\hbar} + b^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{+ip\cdot x/\hbar} \right] \tag{6.33}$$

となり，$b^\dagger$ は反粒子の生成演算子である．このとき，$\varphi^\dagger$ は

$$\varphi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \left[ a^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{+ip\cdot x/\hbar} + b(\boldsymbol{p}) e^{-ip\cdot x/\hbar} \right] \tag{6.34}$$

となり，ちょうど粒子と反粒子が入れ替わった形となる．もし粒子が電荷 $Qe$ を持っていたとすると，場 $\varphi$ は電荷を $-Qe$ だけ変化させる作用を持ち，$\varphi^\dagger$ は逆に電荷を $+Qe$ 変化させる．このように場が電荷に対して決まったふるまいをもっていることが，電荷の保存にとって本質的となる．このことから，電荷のような（保存される）量子数を持つ粒子の場合，粒子と反粒子は異なり，非エルミートな場で記述されることがわかる．逆に粒子と反粒子が同じ粒子の場合は，量子数を持つことができない．

複素場に対するラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^\dagger\, \partial^\mu \varphi - \kappa^2 \varphi^\dagger \varphi \tag{6.35}$$

---

*3) $N$ 粒子状態 $(1/N!)\big(a^\dagger(\boldsymbol{p})\big)^N|0\rangle$ に作用させると固有値 $NE_{\boldsymbol{p}}$ を得る．$a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})$ は数演算子である．

で与えられる．$\varphi(x)$ に対する正準共役場は $\pi(x) = \dot{\varphi}^\dagger(x)/c^2$ となり，$\mathcal{H} = \varphi\pi + \varphi^\dagger\pi^\dagger - \mathcal{L}$ によってハミルトニアン密度が定義される．これから，$H$ は真空エネルギーを差し引いて

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} E_{\boldsymbol{p}} \Big( a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + b^\dagger(\boldsymbol{p})b(\boldsymbol{p}) \Big) \tag{6.36}$$

となる．実場の場合のラグランジアン密度 (6.25) にある頭の係数 1/2 が (6.35) にはないが，これでちょうどエネルギーが正しく導かれる．

なお，複素場は質量の等しい実場 2 つを実数部と虚数部に組むことによっても構成することができる．実場 $\varphi_1, \varphi_2$ から，複素場は

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)\big) \tag{6.37}$$

で与えられる．実場 2 つに対するラグランジアン密度は (6.25) の形のもの 2 つの和になるが，これが (6.35) に等しいことは容易に示される．

いずれにしても，量子場を用いることにより，負エネルギー解の問題は解消する．

## 6.5 相互作用

一般に，(6.25) のような場の 2 次の項で構成されるラグランジアン密度からは，場の運動方程式として線形方程式が得られ，その解は具体的に求められ，自由粒子の系を表す．ラグランジアン密度に場の 3 次以上の項が含まれる場合は，厳密解を求めることはまず不可能である．本書では，場の 3 次以上の項は 2 次までの項から得られる自由粒子の系に対する摂動とみなす立場で話を進めることにする．このとき 3 次以上の項は，粒子の種類，数，状態が変化する相互作用とみなすことができる．

例えば，電磁相互作用は，電子などの荷電粒子が電磁場と相互作用（量子力学的には電子による光子の吸収放出）するものであるが，この相互作用はラグランジアン密度

$$\mathcal{L}(x) = -(-e)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) \tag{6.38}$$

で表される場の 3 次の項によって表される．$-e$ は電子の電荷であり，$A^\mu$ は電磁場（電磁ポテンシャル）である．この項は，3 つの場を生成消滅演算子によって展開するとわかるように，ある時空点 $x$ における電子による光子の吸収や放出，陽電子による光子の吸収や消滅，光子による電子陽電子対生成，電子陽電子対の光子への消滅といったさまざまな相互作用を含んでいる．

さて，相互作用が相対性原理に反しないためには，もちろんラグランジアン密度がスカラーであることが必要であるが，さらに，**因果律**から重要な制限が生ずる．因果律とは，もともと「原因があって結果がある」という意味であろう

が，物理学では，ある時刻の出来事は未来の出来事に影響するが，過去にさかのぼって影響を及ぼすことはないという主張をさす．特殊相対論では，互いに空間的に離れた時空の 2 点（お互いに光円錐の外側にある 2 点）は，座標系によってどちらの時刻が前かが異なるので，2 点での出来事がお互いに影響を及ぼしてはならない．適当な座標系を取れば，この 2 点を同時刻にすることができるが，場の理論では，このような 2 点における相互作用が，お互い影響を及ぼさないためには，2 点における相互作用を表すラグランジアン密度が可換であればよい．詳細は省略するが，このためには，スカラー場，ベクトル場など，整数スピンの場同士が可換，ディラック場など，半整数スピンの場同士が反可換であることが導かれる．これは，整数スピンの場で記述される粒子がボーズ統計に従い，半整数スピンの場で記述される粒子はフェルミ統計に従うということを意味する．このことを**スピンと統計の関係**というが，これは相対論的量子場理論における数少ない厳密な定理の 1 つであり，フィールツおよびパウリによって示された．

## 6.6 ディラック場

自由ディラック方程式の一般解は，エネルギー運動量の固有関数の重ね合わせで

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{\lambda}\left[a_\lambda(\boldsymbol{p})u_\lambda(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x/\hbar}+b^*_\lambda(\boldsymbol{p})v_\lambda(\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x/\hbar}\right] \tag{6.39}$$

と書ける*4)．ここで $a_\lambda(\boldsymbol{p}), b^*_\lambda(\boldsymbol{p})$ は重ね合わせの係数である．$\psi$ を量子場と解釈し直すには，これらの係数を 6.2 節と同様に生成消滅演算子とみなせばよい．$a_\lambda(\boldsymbol{p})$ は，運動量 $\boldsymbol{p}$，ヘリシティ $\lambda$ の粒子の消滅演算子であり，$b^\dagger_\lambda(\boldsymbol{p})$ は反粒子の生成演算子である．電荷 $-e$ をもつ電子の場合，$\psi(x)$ は電荷を $+e$ だけ変化させる性質を持つ演算子となる．

ここで注意すべきは，電子などのスピン 1/2 粒子はフェルミ統計に従うことである．6.2 節の生成消滅演算子は，ボーズ統計に従う粒子を記述していたので，同様の交換関係式を採用するとうまくゆかない．2 粒子以上の状態が，交換の下で反対称な波動関数を持つためには，生成演算子同士，したがって消滅演算子同士が反可換であることが要請される．フェルミオンに対しては，交換子でなく，反交換子

$$\{A,B\}\equiv AB+BA \tag{6.40}$$

*4) ここではスピンの自由度としてヘリシティの固有状態のスピノルを採用したが，一般の直交する 2 状態を用いてもかまわない．

を用いて，反交換関係式

$$\{a_\lambda(\boldsymbol{p}), a^\dagger_{\lambda'}(\boldsymbol{p}')\} = (2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{6.41}$$

$$\{a_\lambda(\boldsymbol{p}), a_{\lambda'}(\boldsymbol{p}')\} = \{a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{p}), a^\dagger_{\lambda'}(\boldsymbol{p}')\} = 0 \tag{6.42}$$

を設定する．これは粒子の生成消滅演算子の間の関係式であるが，反粒子の生成消滅演算子の間にも同じ形の関係式を設定し，粒子の演算子と反粒子の演算子はどの組み合わせも反可換とする．これによりフェルミ統計に従う粒子が記述できる．

**ディラック場**に対するラグランジアン密度として

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - \kappa\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{6.43}$$

を採用する（$\kappa = mc/\hbar$）．これを $\bar{\psi}$ で変分して得られるオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta(\partial_\mu\bar{\psi}_\alpha(x))} - \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\bar{\psi}_\alpha(x)} = 0 \tag{6.44}$$

が，ディラック方程式

$$i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu\psi_\beta(x) - \kappa\psi_\alpha(x) = 0 \tag{6.45}$$

を与えることはすぐ確かめられる．また $\psi$ で変分すると $\bar{\psi}$ に対する方程式が得られるが，これはディラック方程式のエルミート共役を取ったものになっている．

場 $\psi_\alpha(x)$ の正準共役場 $\pi_\alpha(x)$ は $\left(\bar{\psi}(x)i\gamma^0\right)_\alpha = \psi^\dagger_\alpha(x)$ であり，$\bar{\psi}$ の正準共役場は存在しない（$\psi^\dagger = \bar{\psi}\gamma^0$ 自身が $\psi$ の正準共役場）ので，ハミルトニアン密度を

$$\mathcal{H}(x) = \pi_\alpha(x)\psi_\alpha(x) - \mathcal{L}(x) \tag{6.46}$$

から求めると

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= -\bar{\psi}(x)i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\psi(x) + \kappa\bar{\psi}(x)\psi(x)\\ &= \psi^\dagger(x)\big(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \kappa\beta\big)\psi(x)\end{aligned} \tag{6.47}$$

が得られる．これがエネルギー密度の次元を持つためには，展開式 (6.39) の右辺に $c^{1/2}/\hbar$ をかけておく必要がある．$H = \int d^3x\,\mathcal{H}(x)$ に (6.47), (6.39) を代入し，途中で (5.68) を用いた長い計算ののち，

$$H = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_\lambda E_{\boldsymbol{p}}\Big(a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{p})a_\lambda(\boldsymbol{p}) - b_\lambda(\boldsymbol{p})b^\dagger_\lambda(\boldsymbol{p})\Big) \tag{6.48}$$

が得られる．第 2 項を反交換関係式を用いて書き直すと

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\lambda} E_{\boldsymbol{p}} \Big( a_{\lambda}^{\dagger}(\boldsymbol{p}) a_{\lambda}(\boldsymbol{p}) + b_{\lambda}^{\dagger}(\boldsymbol{p}) b_{\lambda}(\boldsymbol{p}) \Big) - 2 \int d^3p\, E_{\boldsymbol{p}}\, \delta^3(0) \tag{6.49}$$

となる．最後のゼロ点エネルギーに相当する項は，実スカラー場の場合と比較すると，スピンの自由度および粒子と反粒子があるために 4 倍になっている他，符号が逆であることが注目される*5)．これを差し引くと，期待されるエネルギーの表式となる．

ディラック場とその正準共役場の同時刻反交換関係式を計算すると，途中に (5.69) を用いて

$$\{\psi_{\alpha}(\boldsymbol{x}, t), \pi_{\beta}(\boldsymbol{x}', t)\} = i\hbar \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \delta_{\alpha\beta} \tag{6.50}$$

が導かれる．これがディラック場に対する正準反交換関係式である．

*5) 超対称性を持つ理論においては，ボソンとフェルミオンのゼロ点エネルギーがちょうど打ち消すので，真空のエネルギーが自動的に 0 となる．

# 第 7 章
# スピン1/2粒子の場

ディラック場は電子を記述する相対論的な場であるが，スピン 1/2 の粒子の相対論的な場としては，ディラック場以外にもいくつか場が存在する．

ヴァイル場は，ディラック場の自由度を半分にした場である．素粒子の標準理論においては，物質粒子であるクォーク・レプトンは（電子も含めて）すべてヴァイル場としてラグランジアンに現れる．

マヨラナ場は，粒子と反粒子の区別のないスピン 1/2 粒子を記述する場であり，電荷を持たないニュートリノがそのような場ではないかとも考えられている．

これらの場はディラック場を出発点として定義することができる．

なお，この章から自然単位系 $\hbar = c = 1$ を用いる．

自然単位系では，速度は光速を単位として，その何倍であるかで表される．軌道角運動量は，$\hbar$ の整数倍の値しかとれないので，その値で表す（スピン角運動量の場合は半整数倍の値もある）．このように,「自然の与えた」単位を用いるのが自然単位系である．

この単位系では独立な次元は 1 つとなる．長さと時間は同じ次元を持ち，質量，運動量およびエネルギーは同じ次元を持つ*1)．エネルギーの次元を基準にとると，長さ・時間はその逆の次元を持つ．速度や角運動量はもちろん無次元量となる．

自然単位系を用いることにより，式が簡明になり見通しがよくなり，かつ計算間違いが減る．最終結果を実用単位に戻すには，適当に $c, \hbar$ をかけてやればよい．

*1) ボルツマン定数も 1 として，温度もエネルギーと同じ次元を持つ．また，$\epsilon_0$, $\mu_0$ も 1 にとる．

## 7.1 ヴァイル場

式 (3.89) で定義した行列 $\gamma_5$ は,

$$(\gamma_5)^2 = 1\,, \tag{3.90a}$$

$$\gamma_5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma_5\,, \tag{3.90b}$$

$$\gamma_5{}^\dagger = \gamma_5 \tag{3.90c}$$

という性質を持っていた．そこで

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}, \tag{7.1a}$$

$$P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} \tag{7.1b}$$

と定義すると，(3.90a) を用いて，

$$P_L^2 = P_L\,, \qquad P_R^2 = P_R \tag{7.2}$$

なる性質を持つことがわかり，これらは射影子となっている．$P_R + P_L = 1$ より，これらは相補的な射影子である．さらに，$P_{L,R}$ は (3.90c) によりエルミートである

$$P_L^\dagger = P_L\,, \qquad P_R^\dagger = P_R \tag{7.3}$$

から，これらは 4 次元スピノルの空間を互いに直交する 2 つの部分空間に射影する．この 2 つの射影子を**カイラル射影子**と呼ぶ．

さらに，$P_{L,R}$ は (3.90b) により，

$$P_L\gamma^\mu = \gamma^\mu P_R\,, \qquad P_R\gamma^\mu = \gamma^\mu P_L \tag{7.4}$$

という性質を持つ．

そこで，ディラック場に対し，これらの射影子を作用させたものを

$$\psi_L = P_L\psi\,, \qquad \psi_R = P_R\psi \tag{7.5}$$

と定義すると，$\psi_{L,R}$ は

$$\begin{aligned} P_L\psi_L &= \psi_L\,, & P_R\psi_L &= 0\,, \\ P_R\psi_R &= \psi_R\,, & P_L\psi_R &= 0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

なる性質を示す．ディラック方程式に $P_{L,R}$ を作用させると，(7.4) に注意して

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\,\psi_L = 0, \tag{7.7a}$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - m\,\psi_R = 0 \tag{7.7b}$$

が得られる．この方程式は $\psi_L$ と $\psi_R$ の連立方程式であるが，質量 $m = 0$ の

場合を考えると，$\psi_L, \psi_R$ のそれぞれが独立した方程式となる．この場合には，$\psi_R = 0$ とおいても矛盾が生じないことがわかるので，$\psi_L$ のみを含む理論を構成することが可能となる．(もちろん $\psi_R$ のみも可能.) $\psi_L, \psi_R$ をそれぞれ左巻き，右巻きの**ヴァイル場**と呼ぶ．ディラック場はこれら 2 つのヴァイル場の和で書ける．

$$\psi = (P_L + P_R)\psi = \psi_L + \psi_R \,. \tag{7.8}$$

ディラック共役に対する射影は，$P_L, P_R$ のエルミート性および $\gamma_5$ が $\gamma^0$ と反可換であることより

$$\bar{\psi}_L \equiv {\psi_L}^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_L \gamma^0 = \bar{\psi} P_R \,, \tag{7.9}$$

$$\bar{\psi}_R \equiv {\psi_R}^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_R \gamma^0 = \bar{\psi} P_L \tag{7.10}$$

が成り立つ．これより，ディラック場のラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \\ &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(\psi_L + \psi_R) \\ &= i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)\end{aligned} \tag{7.11}$$

と書ける．2 行目から 3 行目へ移る際，展開のこれ以外の項は $P_L P_R = P_R P_L = 0$ により消える．この形を眺めると，質量 $m = 0$ の場合は $\psi_L$ と $\psi_R$ が分離するため，片方を問題なく消すことができることが再び確認できる．

さて，ガンマ行列の別の表示として，ディラック表示から変換

$$\gamma^\mu \longrightarrow U\gamma^\mu U^{-1} \,, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

(1 は 2 行 2 列の単位行列) によって得られるものを**ヴァイル表示**（または**カイラル表示**）と呼ぶ．具体的な形は

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{7.13a}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{7.13b}$$

で与えられる．このとき $\gamma_5$ は

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

なる形を持つ．この表示における $P_{L,R}$ は

$$P_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,, \qquad P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

であり，それぞれ上 2 成分，下 2 成分への射影であることがすぐに見てとれる．

この表示では，$\psi_L$, $\psi_R$ はそれぞれ上 2 成分，下 2 成分のみからなるスピノルとみなすことができる．このためヴァイルスピノルは 2 成分スピノルとも呼ばれる．他の表示では $\psi_{L,R}$ は見かけ上 4 成分であるが，当然実質 2 成分の自由度しか持っていない．

ヴァイル場のラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L \tag{7.16}$$

と書け，質量項はない．ヴァイル場に質量を与える方法は，後にマヨラナ場との関連において論ずる．

## 7.2 ヴァイルフェルミオンのスピン状態

ヴァイル場の生成する粒子はもちろんスピン 1/2 粒子であるが，自由度が半分になっているので，どの自由度が残っているかを調べてみる．それには，5.3 節で，ヘリシティ射影子が質量 0 の極限でカイラル射影子に一致することを見たことを思い出すと，左巻きのヴァイル場はヘリシティ $-$，右巻きのヴァイル場はヘリシティ $+$ の粒子を含んでいることがわかり，確かに自由度が半減している．また，質量を持っていれば，静止系に移って $180°$ 回転すればヘリシティを反転できるので，片方のヘリシティ状態しかないと回転不変性と相容れない．このように質量が 0 の場合のみにヴァイル場が単独で意味を持つことが再確認できる．

次に反粒子がどうなっているかを見る．これには，ヴァイル場の荷電共役を取ったものの性質を見るとよい．荷電共役が $C\bar{\psi}^T = C\gamma^{0T}\psi^*$ と書けることに注意して*2)，ヴァイル表示では，荷電共役行列 $C$ はディラック表示の $C$ から $C \to UCU^T$ として導けるので

$$C = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}, \qquad C(\gamma^0)^T = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

であり，上 2 成分のみを持つ左巻きヴァイル場の荷電共役は，下 2 成分のみの右巻きヴァイル場になることがわかる．具体的な表示を用いないでこれを示すと，例えば左巻きヴァイル場の場合，

$$\begin{aligned} C\bar{\psi}_L^T &= C(\gamma^0)^T P_L^* \psi^* = C(\gamma^0)^T P_L^T \psi^* = CP_R^T(\gamma^0)^T\psi^* = P_R C(\gamma^0)^T\psi^* \\ &= P_R\psi^c \end{aligned} \tag{7.18}$$

となる．つまり，左巻きヴァイル場に含まれる反粒子はヘリシティ $+$ であり，

*2) $\psi$ が演算子のときの記法として，$\psi^\dagger$ は演算子としてのエルミート共役をとるとともに，スピノル空間の行列として転置をとることとし，$\psi^*$ は演算子としてエルミート共役をとるが，行列は転置をとらないとする．

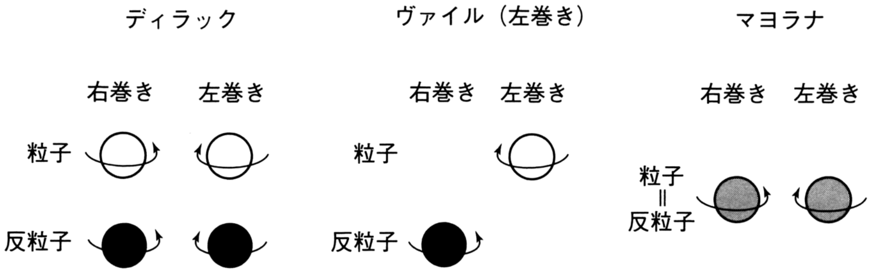



図 7.1　ディラック，ヴァイル，マヨラナフェルミオンの違い．

粒子と逆のヘリシティを持つ（図 7.1）．一例として，弱い相互作用による素粒子の崩壊ではニュートリノが生成されることがあるが，ニュートリノは左巻き，反ニュートリノは右巻きであり，これは実験的にも確認されている．

局所性を持つ相対論的な場の理論においては，後に 8.7 節で述べるように CPT 定理が成立し，理論は常に $CPT$ 対称性を持っている．$PT$ 変換によってヘリシティは符号を変えるので，$CPT$ 対称性から，あるヘリシティの粒子が存在すれば，逆向きのヘリシティの粒子も組になっていなければならない．上で確かめたヴァイル場の粒子と反粒子のヘリシティは，このことと整合している．

以上の議論からヴァイル場の展開式を書き下すことができるが，その前に具体的なスピノルの形から上の結論を確認してみる．ヘリシティ固有状態のスピノル (5.20) において，極限 $m \to 0$ を取ると，

$$u_+(\boldsymbol{p}) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} \chi_{\theta\varphi} \\ \chi_{\theta\varphi} \end{pmatrix}, \qquad u_-(\boldsymbol{p}) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} \chi_{\overline{\theta\varphi}} \\ -\chi_{\overline{\theta\varphi}} \end{pmatrix}, \tag{7.19}$$

$$v_+(\boldsymbol{p}) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -\chi_{\overline{\theta\varphi}} \\ \chi_{\overline{\theta\varphi}} \end{pmatrix}, \qquad v_-(\boldsymbol{p}) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -\chi_{\theta\varphi} \\ -\chi_{\theta\varphi} \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

となるので，$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し

$$\gamma_5 u_\pm(\boldsymbol{p}) = \pm u_\pm(\boldsymbol{p}), \qquad \gamma_5 v_\pm(\boldsymbol{p}) = \mp v_\pm(\boldsymbol{p}) \tag{7.21}$$

が成り立つ．したがって，$\gamma_5\psi_L = -\psi_L$ をみたす左巻きヴァイル場は $u_-(\boldsymbol{p})$ と $v_+(\boldsymbol{p})$ だけ，すなわち左巻きの粒子と右巻きの反粒子を含むことがわかる．生成消滅演算子による展開式は

$$\psi_L(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \left[a_-(\boldsymbol{p})u_-(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x} + b_+^\dagger(\boldsymbol{p})v_+(\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x}\right] \tag{7.22}$$

となる．

## 7.3 マヨラナ場

ディラック場は，粒子と反粒子の異なるスピン 1/2 粒子を表す場であるが，**マヨラナ場**は，粒子と反粒子が同一のスピン 1/2 粒子を表す場である．以下ではディラック場から出発してマヨラナ場を定義する．

スピン 0 の粒子を表すクライン・ゴルドン場の場合，実の（演算子としてはエルミートな）場は粒子と反粒子が同一の粒子に対応し，複素場は粒子と反粒子の異なる粒子に対応していた．複素場 $\varphi$ に実条件 $\varphi^* = \varphi$ を課すと，実場が得られる．

スピン 1/2 の場合，ディラック場は既に見たように粒子と反粒子が異なる粒子に対応している．(電荷を持つ粒子を表せることから明らかであろう．) 粒子と反粒子が同一のスピン 1/2 粒子に対応する場を定義するには，実である条件 $\psi^* = \psi$ を課せばよいように思えるが，この 2 つはローレンツ変換のもとでの変換性が異なるので，この等式は相対性原理をみたさない．(ある座標系で成り立っても，別の座標系では成り立たない．) 第 4 章で考察したように，$\psi^*$ の成分を組み替えた $\psi^c = C\bar{\psi}^T$ ならば $\psi$ と同様に変換するので，ローレンツ共変性と矛盾することなく実条件を課すことができる．そこで，条件（**マヨラナ条件**）

$$\psi^c(x) = C\bar{\psi}^T(x) = \psi(x) \tag{7.23}$$

を課した場をマヨラナ場と定義する．

ディラック場の展開式

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_\lambda \left[ a_\lambda(\boldsymbol{p}) u_\lambda(\boldsymbol{p}) e^{-ip\cdot x} + b_\lambda^\dagger(\boldsymbol{p}) v_\lambda(\boldsymbol{p}) e^{ip\cdot x} \right] \tag{6.39}$$

から $\psi^c = C\bar{\psi}^T$ を計算すると

$$\begin{aligned} \psi^c(\boldsymbol{x}, t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_\lambda \left[ a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{p}) C\bar{u}_\lambda^T(\boldsymbol{p}) e^{+ip\cdot x} + b_\lambda(\boldsymbol{p}) C\bar{v}_\lambda^T(\boldsymbol{p}) e^{-ip\cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_\lambda \left[ a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{p}) v_\lambda(\boldsymbol{p}) e^{+ip\cdot x} + b_\lambda(\boldsymbol{p}) u_\lambda(\boldsymbol{p}) e^{-ip\cdot x} \right] \end{aligned} \tag{7.24}$$

となるが，マヨラナ条件 (7.23) を適用すると，関係

$$a_\lambda(\boldsymbol{p}) = b_\lambda(\boldsymbol{p}) \,, \qquad a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{p}) = b_\lambda^\dagger(\boldsymbol{p}) \tag{7.25}$$

が導かれる．これは粒子の生成消滅演算子と反粒子の生成消滅演算子が同一であることを述べている．このように，マヨラナ場が粒子と反粒子が同一のスピン 1/2 粒子を表していることが確かめられた（図 7.1）．

マヨラナ場の双一次形式 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ は，$\psi$ と $\bar{\psi}$ が本質的に同じ（一次従属）であることから，フェルミ統計によって $4 \times 4$ の 16 個のうち反対称な部分である 6 個しか存在しない．これを具体的に見てみよう．まず，マヨラナ場に限らず，双一次形式 $\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2$ は $\psi^c$ を使って書き直すことができる．

$$\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2 = \bar{\psi}_{1\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}\psi_{2\beta} = -\psi_{2\beta}\Gamma_{\alpha\beta}\bar{\psi}_{1\alpha} = -\psi_2^T\Gamma^T\bar{\psi}_1^T = \bar{\psi}_2^c C\Gamma^T C^{-1}\psi_1^c. \tag{7.26}$$

2 つめの等号でフェルミ統計による反可換性，最後の等号で $\bar{\psi}^c = -\psi^T C^{-1}$ を用いた．(4.10) により，16 個の $\Gamma$ に対し

$$C\Gamma^T C^{-1} \equiv \Gamma^c = \epsilon_c^{(\Gamma)}\Gamma \tag{7.27}$$

が成り立ち，最終的に

$$\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2 = \epsilon_c^{(\Gamma)}\bar{\psi}_2^c\Gamma\psi_1^c \tag{7.28}$$

が得られる．ここで，$\psi_1 = \psi_2 = \psi$，さらにマヨラナ条件 $\psi^c = \psi$ を課すと，

$$\bar{\psi}\Gamma\psi = \epsilon_c^{(\Gamma)}\bar{\psi}\Gamma\psi \tag{7.29}$$

を得る．符号 $\epsilon_c^{(\Gamma)}$ は (4.11) にあるように $\gamma^\mu$ および $\sigma^{\mu\nu}$ に対しては $-1$，他は $+1$ である．したがって，マヨラナ場の双一次形式のうちベクトルとテンソルは 0 となる．マヨラナ場のベクトルカレント $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ が存在しないことは，マヨラナフェルミオンが粒子と反粒子の区別がなく，電荷のような粒子数を持てないことを端的に示している．

マヨラナ場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{7.30}$$

で与えられる．ディラック場のラグランジアンと因子 1/2 だけ異なるが，これで正しく規格化されたエネルギーの表式を与える．（この 1/2 は複素スカラー場と実スカラー場のラグランジアンの関係に現れるものと同じである．）次節では，ヴァイル場との関連でこの因子を再現する．

最後に，ガンマ行列の**マヨラナ表示**について述べておく．マヨラナ表示とは，ガンマ行列が 4 つとも純虚行列であるような表示である．（このような表示が存在することは，付録 D.5 節で説明する．）この表示では，ディラック方程式 $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ の $\psi$ に作用する部分が実数で書けるので，$\psi$ の実部と虚部が完全に分離する．そのため，$\psi$ が実という条件を矛盾なく課すことができる．この条件はこの表示におけるマヨラナ条件に他ならない．なぜなら，荷電共役行列 $C$ の性質 (4.9) から，(4.5) に相当する関係 $(C\gamma^{0T})\gamma^{\mu *}(C\gamma^{0T})^{-1} = -\gamma^\mu$ が成り立つが，$\gamma^\mu$ がすべて純虚ならば，この式は $C\gamma^{0T} = 1$ ととれば成り立つので，$\psi$ の荷電共役は $\psi^c = \psi^*$ と書くことができるからである．このよう

に，マヨラナ表示はマヨラナスピノルを実スピノルとして書くことのできるという意味ではわかりやすい表示ではあるが，ディラック表示やヴァイル表示と異なり $\gamma^i$ が $\sigma_i$ に比例する形にならないため，空間回転の対称性が見にくく，それほど使われない．

## 7.4 ヴァイル場とマヨラナ場の関係

ヴァイル場とマヨラナ場は，それぞれディラック場から全く異なる手続きによって定義された場であるが，物理的にはいずれもディラック場の半分の自由度を持つことは共通している．以下ではこの 2 つが物理的に等価であることを，ヴァイル場からマヨラナ場を具体的に構成し，その逆も行うことにより示す．

実際，ヴァイル場 $\psi_L$ およびその荷電共役 $(\psi_L)^c = C(\bar{\psi}_L)^T$ から

$$\psi = \psi_L + (\psi_L)^c \tag{7.31}$$

を作ると，$((\psi_L)^c)^c = \psi_L$ なので，$\psi$ は関係 $\psi^c = \psi$ をみたしており，すなわちマヨラナ場である．ここで第 2 項は (7.18) で見たように右巻きのヴァイル場であり，$\psi$ は両方のヘリシティ成分をそろえていることがわかる．これは，左巻きと右巻きのヴァイル場からディラック場を構成する手続き (7.8) において，右巻きヴァイル場として左巻きヴァイル場自身の荷電共役を用いたものとなっている．

逆に，マヨラナ場 $\psi_M$ からそのカイラル射影 $P_L\psi_M$ を作ると，それ自身ではマヨラナ条件はみたさなくなるため通常のヴァイル場となる．

マヨラナ場のラグランジアン (7.30) に $\psi_M = \psi_L + C\bar{\psi}_L^T$ を代入して整理すると，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_L)^c i\gamma^\mu\partial_\mu(\psi_L)^c - \frac{1}{2}m\big[\bar{\psi}_L(\psi_L)^c + (\bar{\psi}_L)^c\psi_L\big] \tag{7.32}$$

となる．この第 2 項は

$$(\bar{\psi}_L)^c i\gamma^\mu\partial_\mu(\psi_L)^c = \partial_\mu\big[(\bar{\psi}_L)^c i\gamma^\mu(\psi_L)^c\big] - \partial_\mu(\bar{\psi}_L)^c i\gamma^\mu(\psi_L)^c \tag{7.33}$$

と変形できるが，この第 1 項は全微分の形なので，$\mathcal{L}$ を全時空で積分して作用を求めると表面項となり，運動方程式に寄与しないので落とすと

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - \frac{1}{2}\partial_\mu(\bar{\psi}_L)^c i\gamma^\mu(\psi_L)^c - \frac{1}{2}m\big[\bar{\psi}_L(\psi_L)^c + (\bar{\psi}_L)^c\psi_L\big] \tag{7.34}$$

となる（この操作を俗に「部分積分」という）が*3)，さらに $\bar{\psi}_1^c\gamma^\mu\psi_2^c = -\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1$

*3) そもそも，本書で用いているディラック場のラグランジアン密度は，このことを含めてエルミートになっている．

を用いる（関係 $C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu$ を使い，$\psi$ と $\bar{\psi}$ の順序を交換する際に，フェルミオンであることから $-1$ が出る）と，

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - \frac{1}{2} m \big[ \bar{\psi}_L (\psi_L)^c + (\bar{\psi}_L)^c \psi_L \big] \tag{7.35}$$

と変形される．この式は，質量が 0 であれば，マヨラナ場はヴァイル場と同等であることを示している．また，マヨラナ場の質量項は，$\psi_L \psi_L$ または $\psi_L^* \psi_L^*$ の形になっているので，粒子数保存をみたさないことがわかる．実際，この質量項を書き直すと

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L (\psi_L)^c + (\bar{\psi}_L)^c \psi_L &= \bar{\psi}_L C \bar{\psi}_L^T - \psi_L^T C^{-1} \psi_L \\ &= C_{\alpha\beta} (\bar{\psi}_L)_\alpha (\bar{\psi}_L)_\beta + C^*_{\alpha\beta} (\psi_L)_\alpha (\psi_L)_\beta \end{aligned} \tag{7.36}$$

と書ける．また，この表式から，行列 $C$ の反対称性と，場がフェルミ統計に従うことが整合していることがわかる．

# 第 8 章
# 場と状態の変換，$\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$

本章では，素粒子の相互作用を記述する際に重要な役割を果たす離散変換である荷電共役 $C$，空間反転 $P$，および時間反転 $T$ について述べる．まず，スピン 1/2 粒子の場と状態が順時正規ローレンツ変換のもとでどのように変換するかを調べたのち，$C, P, T$ のそれぞれを議論し，さらに CPT 定理を導く．

## 8.1　場と状態のローレンツ変換

量子場の演算子は，状態の波動関数と関係 (6.5) で結ばれていた．まずスカラー場の演算子を考えると，一般に，場の演算子の行列要素

$$\big\langle f\big|\varphi(x)\big|i\big\rangle \tag{8.1}$$

を別の座標系 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ で記述したとき，状態 $\big|i\big\rangle$ が

$$\big|i'\big\rangle = \mathcal{U}\big|i\big\rangle \tag{8.2}$$

と変換したとして，行列要素自身は座標系によらないことから

$$\begin{aligned}\big\langle f\big|\varphi(x)\big|i\big\rangle &= \big\langle f\big|\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}\,\varphi(x)\,\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}\big|i\big\rangle \\ &= \big\langle f'\big|\mathcal{U}\,\varphi(x)\,\mathcal{U}^{-1}\big|i'\big\rangle\end{aligned} \tag{8.3}$$

と書ける（ここでは $\mathcal{U}$ はユニタリ演算子とした）．これより，スカラー場の演算子は

$$\varphi(x') = \mathcal{U}\,\varphi(x)\,\mathcal{U}^{-1} \tag{8.4}$$

と変換するべきである．

このとき，1 粒子状態 $\big|\boldsymbol{p}\big\rangle$ がどのように変換するかは，

$$\big|\boldsymbol{p}\big\rangle \to \mathcal{U}\big|\boldsymbol{p}\big\rangle = \mathcal{U}a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\big|0\big\rangle = \mathcal{U}\,a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\,\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}\big|0\big\rangle \tag{8.5}$$

により，生成演算子の変換と，真空状態の変換性がわかればよい．任意数の粒子を含む状態も同様である．

真空はエネルギー，運動量，角運動量ともに 0 の固有状態で，そのような状態として唯一のものとする．真空状態 $|0\rangle$ は従って並進，回転のもとで不変，またブーストに対しても不変であることがわかる．

$$\mathcal{U}|0\rangle = |0\rangle. \tag{8.6}$$

これから，1 粒子状態の変換性は，生成演算子の変換性のみで定まる．

自由スカラー場を平面波で次のように展開する．

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \left[a(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x} + b^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x}\right]. \tag{8.7}$$

変換式 (8.4) の右辺は

$$\mathcal{U}\,\varphi(x)\,\mathcal{U}^{-1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \left[\mathcal{U}\,a(\boldsymbol{p})\,\mathcal{U}^{-1}e^{-ip\cdot x} + \mathcal{U}\,b^\dagger(\boldsymbol{p})\,\mathcal{U}^{-1}e^{ip\cdot x}\right] \tag{8.8}$$

となり，左辺は

$$\varphi(x') = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}'}} \left[a(\boldsymbol{p}')e^{-ip'\cdot x'} + b^\dagger(\boldsymbol{p}')e^{ip'\cdot x'}\right] \tag{8.9}$$

と展開できる（積分変数を $\boldsymbol{p}'$ とした）が，この式の平面波の指数 $p'\cdot x'$ は

$$p'\cdot x' = p'\cdot \Lambda x = \Lambda^{-1}p'\cdot x \tag{8.10}$$

と書き直せる[*1)]ので，$p = \Lambda^{-1}p'$ と書くと，

$$\varphi(x') = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}'}} \left[a(\Lambda\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x} + b^\dagger(\Lambda\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x}\right] \tag{8.11}$$

となる（$\Lambda\boldsymbol{p}$ は $\Lambda p$ の空間成分とする）．積分要素が $2E_{\boldsymbol{p}'}$ の因子を含めてローレンツ不変であることを用いれば，

$$\varphi(x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \left[a(\Lambda\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x} + b^\dagger(\Lambda\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x}\right] \tag{8.12}$$

と書ける．(8.12) と (8.8) の比較より，生成消滅演算子のローレンツ変換は

$$\mathcal{U}\,a(\boldsymbol{p})\,\mathcal{U}^{-1} = a(\Lambda\boldsymbol{p}), \tag{8.13a}$$

$$\mathcal{U}\,b^\dagger(\boldsymbol{p})\,\mathcal{U}^{-1} = b^\dagger(\Lambda\boldsymbol{p}) \tag{8.13b}$$

となる．$a^\dagger(\boldsymbol{p}), b(\boldsymbol{p})$ に対しても当然同様の関係式が成り立つ．結局，1 粒子状態の変換は

---

*1)　ローレンツ変換の逆変換については付録の B.4 節に述べてある．

$$\mathcal{U}|\boldsymbol{p}\rangle = |\Lambda \boldsymbol{p}\rangle \tag{8.14}$$

となり，運動量が古典的に受けるローレンツ変換 $p' = \Lambda p$ と一致する結果が得られる．

## 8.2 ディラック場と状態のローレンツ変換

スピノルであるディラック場のローレンツ変換は，スカラー場と異なり，変換のもとで 4 つの成分が混ざる．斉次正規順時ローレンツ変換のもとでは，第 3 章でディラックスピノルに対して求めた変換と同じ変換行列 $S$

$$S = \exp\left(-\frac{i}{4}\theta_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \tag{8.15}$$

を用いて，(8.4) の代わりに

$$\psi_\alpha(\Lambda x) = S_{\alpha\beta}\left(\mathcal{U}\,\psi_\beta(x)\mathcal{U}^{-1}\right) \tag{8.16}$$

と変換するであろう[*2]．

これから生成消滅演算子の変換性を求めるため，自由ディラック場を平面波で次のように展開する．

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\pm s}\left[a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})e^{-ip\cdot x} + b^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})e^{ip\cdot x}\right]. \tag{8.17}$$

ここでは，スピンの自由度について，スピンベクトル $s$ と $\bar{s}$ で表される状態（または $s$ と $-s$. スピノルの位相以外は同じ）を独立な状態にとることにする．($s$ は $p\cdot s = 0$, $s^2 = -1$ をみたす範囲内でそれぞれの $\boldsymbol{p}$ に対して任意にとれる．一般に $a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ はヘリシティ固有状態の演算子 $a_\pm(\boldsymbol{p})$ の線形結合になっている.）

まず，変換式 (8.16) の右辺は

$$S\mathcal{U}\,\psi(x)\mathcal{U}^{-1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\pm s}\Big[\mathcal{U}\,a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\mathcal{U}^{-1}Su(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})e^{-ip\cdot x} + \mathcal{U}\,b^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\mathcal{U}^{-1}Sv(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})e^{ip\cdot x}\Big] \tag{8.18}$$

と展開される．ここで，スピノル $Su(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ がどのようなスピノルであるかを

---

*2） 変換 (8.16) は以下のようにも書き直せる．

$$\mathcal{U}\,\psi(x)\mathcal{U}^{-1} = S^{-1}\psi(\Lambda x),$$
$$\mathcal{U}^{-1}\psi(x)\,\mathcal{U} = S\psi(\Lambda^{-1}x).$$

この 2 つめの式はちょうど (3.34) に対応する関係である．

知る必要がある．第 5 章で見たように，$u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ は

$$\gamma\cdot p\, u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = m\, u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}), \tag{8.19a}$$

$$\gamma_5\gamma\cdot s\, u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{8.19b}$$

をみたすスピノルであった．第 3 章で導いた $S$ のみたす関係式 (3.25) より，

$$S\gamma_\mu S^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu\gamma_\nu \tag{8.20}$$

が成立する．また，(8.15) の形の $S$ は，$[\gamma_5,\sigma^{\mu\nu}]=0$ に注意すれば $\gamma_5$ と可換なので，(8.19) に左から $S$ を作用させることにより，

$$\gamma_\mu\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu\, Su(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = m\, Su(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}), \tag{8.21a}$$

$$\gamma_5\gamma_\mu\Lambda^\mu{}_\nu s^\nu\, Su(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = Su(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{8.21b}$$

が導かれる．これから，$Su(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ は，運動量 $p'=\Lambda p$, スピンベクトル $s'=\Lambda s$ のスピノルであることがわかる．規格化は第 3 章で導いた $S$ の性質 $\gamma^0 S^\dagger\gamma^0 = S^{-1}$ より，

$$\overline{Su}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})Su(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = \bar{u}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = 2m \tag{8.22}$$

と変わらないので，位相を除いて

$$Su(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = e^{i\xi}u(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{s}') \tag{8.23}$$

と結論される．($\xi$ は一般に $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{s}$, $\Lambda^\mu{}_\nu$ による．) 負エネルギースピノル $v$ についても全く同様の議論ができる．

これを用いて，(8.18) は

$$S\mathcal{U}\,\psi(x)\mathcal{U}^{-1} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{\pm s}\Big[\mathcal{U}\,a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\mathcal{U}^{-1}e^{i\xi}u(\Lambda\boldsymbol{p},\Lambda\boldsymbol{s})e^{-ip\cdot x} + \mathcal{U}\,b^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\mathcal{U}^{-1}e^{i\bar{\xi}}v(\Lambda\boldsymbol{p},\Lambda\boldsymbol{s})e^{ip\cdot x}\Big] \tag{8.24}$$

と変形される．

一方，(8.16) の左辺は

$$\psi(\Lambda x) = \int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}'}}\sum_{\pm s'}\Big[a(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{s}')u(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{s}')e^{-ip'\cdot\Lambda x} + b^\dagger(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{s}')v(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{s}')e^{ip'\cdot\Lambda x}\Big] \tag{8.25}$$

と書ける（和をとる変数を $p$, $s$ の代わりに先回りして $p'$, $s'$ とした）．これは，逆変換 $\Lambda^{-1}$ を用いて

$$\psi(\Lambda x) = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}'}} \sum_{\pm s'} \Big[ a(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{s}') u(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{s}') e^{-i\Lambda^{-1}p'\cdot x} + b^\dagger(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{s}') v(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{s}') e^{i\Lambda^{-1}p'\cdot x} \Big] \tag{8.26}$$

と書き直せるが，$p = \Lambda^{-1}p'$ と定義し，$d^3p'/2E_{\boldsymbol{p}'}$ がローレンツ不変であることを用い，また，$s = \Lambda^{-1}s'$ と書けば，関係 $p{\cdot}s = 0$ が保てるので

$$\psi(\Lambda x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\pm s} \Big[ a(\Lambda \boldsymbol{p}, \Lambda \boldsymbol{s}) u(\Lambda \boldsymbol{p}, \Lambda \boldsymbol{s}) e^{-ip\cdot x} + b^\dagger(\Lambda \boldsymbol{p}, \Lambda \boldsymbol{s}) v(\Lambda \boldsymbol{p}, \Lambda \boldsymbol{s}) e^{ip\cdot x} \Big] \tag{8.27}$$

となる．これと (8.24) を比較すると，生成消滅演算子の変換性が

$$\mathcal{U}\, a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \mathcal{U}^{-1} = e^{-i\xi} a(\Lambda \boldsymbol{p}, \Lambda \boldsymbol{s}), \tag{8.28a}$$

$$\mathcal{U}\, b^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \mathcal{U}^{-1} = e^{-i\bar{\xi}} b^\dagger(\Lambda \boldsymbol{p}, \Lambda \boldsymbol{s}) \tag{8.28b}$$

となっていることがわかり，1 粒子状態の変換性もこれに従って決まる．このように，結果は予想されるものと一致している．

生成消滅演算子の間の関係をきちんと示すには，例えば $\psi(x)$ の展開式から $a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})$ の項を取り出す操作が必要になる．これには，まず (8.17) に対し，運動量 $\boldsymbol{p}$ の部分を取り出す．

$$\int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\pm \boldsymbol{s}} \Big[ a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{-iE_{\boldsymbol{p}}t} + b^\dagger(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) v(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{iE_{\boldsymbol{p}}t} \Big].$$

次に，運動量 $\boldsymbol{p}$ の正負エネルギー解のスピノル間の直交性 (5.68) を用いると 4 つのスピノルから求める部分が取り出せる．

$$u^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \psi(x) = a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{-iE_{\boldsymbol{p}}t}\ .$$

結果として

$$a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = \int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} u^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \psi(\boldsymbol{x}, 0),$$

$$b^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = \int d^3x\, e^{+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} v^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \psi(\boldsymbol{x}, 0)$$

が得られる．

ここで，ローレンツ変換のもとでスピンがどのように変換するかを具体的に見てみよう．上で一般のスピンベクトルで表される状態を用いた理由のひとつは，ヘリシティ固有状態が必ずしもローレンツ変換のもとで不変でないためである．式を見やすくするため，運動量が $z$ 軸方向の粒子を考える．

$$p^\mu = (E_p, 0, 0, p)\ . \tag{8.29}$$

ヘリシティ $+$ の固有状態のスピンベクトルは,

$$s_+^\mu = \frac{1}{m}\,(p, 0, 0, E_p) \tag{8.30}$$

と書ける.($p{\cdot}s = 0$, $s^2 = 1$ が成り立っていることを確かめよ.)この状態に空間回転を施しても,ヘリシティ固有状態のままであることは明らかである.また,$z$ 方向に速度 $\beta$ でブーストしてやると

$$p'^\mu = \big(\gamma(E_p + \beta p), 0, 0, \gamma(p + \beta E_p)\big) = (E_{p'}, 0, 0, p'), \tag{8.31}$$

$$s'^\mu = \frac{1}{m}\,\big(\gamma(p + \beta E_p), 0, 0, \gamma(E_p + \beta p)\big) = \frac{1}{m}\,(p', 0, 0, E_{p'}) \tag{8.32}$$

となり,やはりヘリシティ $+$ の状態である.(ただし,運動量と逆方向にブーストして $p$ と $p'$ の符号が逆になる場合は,ヘリシティ $-$ である.)

ところが,$x$ 方向に速度 $\beta$ でブーストしてみると,

$$p'^\mu = \big(\gamma E_p, \gamma\beta E_p, 0, p\big), \tag{8.33}$$

$$s'^\mu = \frac{1}{m}\,\big(\gamma p, \gamma\beta p, 0, E_p\big) \tag{8.34}$$

となり,$\boldsymbol{p}'$ と $\boldsymbol{s}'$ は同じ向きを向いていないので,ヘリシティ固有状態ではなくなっている.運動量 $p'$ を

$$p'^\mu = \big(E_{p'}, p'\sin\theta', 0, p'\cos\theta'\big) \tag{8.35}$$

($E_{p'} = \gamma E_p$, $\tan\theta' = \gamma\beta E_p/p$) と書いてやり,スピンベクトルを $\boldsymbol{p}'$ に平行な部分と垂直な部分に分解すると

$$s'^\mu = s'^\mu_\parallel \cos\zeta + s'^\mu_\perp \sin\zeta\,, \tag{8.36}$$

$$s'^\mu_\parallel = \frac{1}{m}\,\big(p', E_{p'}\sin\theta', 0, E_{p'}\cos\theta'\big)\,, \tag{8.37}$$

$$s'^\mu_\perp = (0, -\cos\theta', 0, \sin\theta')\,, \tag{8.38}$$

$$\tan\zeta = \frac{\beta m}{p} \tag{8.39}$$

と書ける.横偏極の成分が存在することは,ヘリシティ固有状態でないことを端的に示している.

今まではディラック場の変換性として議論したが,マヨラナ場でも全く同じである.ヴァイル場については,$\gamma_5$ が上で述べたように斉次正規順時ローレンツ変換の $S$ と可換であることから,左巻き,右巻きヴァイル場はそれぞれディラック場と同様 $S$ により変換する.特にガンマ行列のヴァイル表示 (7.13) を用いると,$\sigma^{\mu\nu}$ は

$$\sigma^{0i} = \begin{pmatrix} -i\sigma_i & 0 \\ 0 & i\sigma_i \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \tag{8.40}$$

と書けるので，$S$ は

$$S = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta} + i\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{1}{2}(-\boldsymbol{\eta} + i\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \end{pmatrix} \tag{8.41}$$

と書け，左巻き（上 2 成分），右巻き（下 2 成分）がそれぞれ独立に変換することが具体的に見てとれる．

## 8.3 荷電共役 $C$

三つの重要な離散変換のうち，まず荷電共役 (Charge conjugation) $C$ を議論する．これは粒子の場と反粒子の場を入れ替える変換である．ディラック場 $\psi(x)$ に対し，その反粒子の場は，粒子の場のエルミート共役を粒子と同じローレンツ変換性を持たせた $\psi^c(x) = C\bar{\psi}^T(x)$ で定義され，荷電共役変換を

$$\mathcal{C}\psi(x)\,\mathcal{C}^{-1} = \eta_C C\bar{\psi}^T(x) \tag{8.42}$$

と定義する．ここで $\eta_C$ は位相因子である．念のため注意しておくと，$\mathcal{C}$ は量子場に作用するユニタリ演算子，$C$ はスピノル空間に作用する 4 行 4 列の定数ユニタリ行列である．すなわち，スピノル成分で書けば

$$\mathcal{C}\psi_\alpha(x)\,\mathcal{C}^{-1} = \eta_C C_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta(x) \tag{8.43}$$

となる．

この変換式のエルミート共役より，$\bar{\psi}$ に対する変換式が得られる．

$$\mathcal{C}\bar{\psi}(x)\,\mathcal{C}^{-1} = -\eta_C^*\psi^T(x)C^{-1}. \tag{8.44}$$

（関係 $C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu$, $CC^\dagger = 1$, $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ を用いる．）これから，$\psi^c$ に対する変換は

$$\mathcal{C}\psi^c(x)\,\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}C\bar{\psi}^T(x)\,\mathcal{C}^{-1} = \eta_C^*\psi(x) \tag{8.45}$$

となる．($C^T = -C$ を用いる．）従って，荷電共役変換を 2 回行うと，$\eta_C$ によらず $\mathcal{C}^2 = 1$ となる．

$$\mathcal{C}^2\psi(x)\,\mathcal{C}^{-2} = \psi(x). \tag{8.46}$$

マヨラナ場 $\psi^c = \psi$ に対しては，(8.42) と (8.45) の整合性から，$\eta_C = \eta_C^*$，すなわち，$\eta_C = \pm 1$ が要請される*3)．この場合もちろん

*3) これは実スカラー場の荷電共役に対する条件と同様である．

$$\mathcal{C}\psi(x)\,\mathcal{C}^{-1} = \pm\psi(x) \tag{8.47}$$

となる．

状態に対する変換性を見るため，展開式 (8.17) に対し (8.42) を適用すると，7.3 節と同様に，

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\psi(x)\,\mathcal{C}^{-1} &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{\pm s}\Big[\mathcal{C}a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\mathcal{C}^{-1}u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})e^{-ip\cdot x} \\
&\qquad\qquad + \mathcal{C}b^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\mathcal{C}^{-1}v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})e^{+ip\cdot x}\Big] \\
&= \eta_C\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{\pm s}\Big[a^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})e^{+ip\cdot x} \\
&\qquad\qquad + b(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})e^{-ip\cdot x}\Big].
\end{aligned} \tag{8.48}$$

これより

$$\mathcal{C}a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\mathcal{C}^{-1} = \eta_C\, b(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}), \tag{8.49a}$$

$$\mathcal{C}b^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\mathcal{C}^{-1} = \eta_C\, a^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}). \tag{8.49b}$$

逆に

$$\mathcal{C}a^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\mathcal{C}^{-1} = \eta_C^*\, b^\dagger(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}), \tag{8.50a}$$

$$\mathcal{C}b(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\,\mathcal{C}^{-1} = \eta_C^*\, a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}). \tag{8.50b}$$

真空状態に対する荷電共役を

$$\mathcal{C}\big|0\big\rangle = \big|0\big\rangle \tag{8.51}$$

と定義すると，1 粒子状態の変換性は

$$\mathcal{C}\big|\boldsymbol{p},\boldsymbol{s},\text{粒子}\big\rangle = \eta_C^*\big|\boldsymbol{p},\boldsymbol{s},\text{反粒子}\big\rangle, \tag{8.52a}$$

$$\mathcal{C}\big|\boldsymbol{p},\boldsymbol{s},\text{反粒子}\big\rangle = \eta_C\big|\boldsymbol{p},\boldsymbol{s},\text{粒子}\big\rangle \tag{8.52b}$$

となる．

マヨラナ場の場合には，1 粒子状態は荷電共役の固有状態で，固有値は $\pm 1$ のどちらかとなる．ヴァイル場に対しては，7.2 節で見たように，左巻きヴァイル場の荷電共役 $\mathcal{C}\psi_L(x)\,\mathcal{C}^{-1}$ は右巻きヴァイル場となる．従って，左巻きヴァイル場だけが存在する場合には，場の荷電共役は定義できても，生成消滅演算子については変換が定義できない（例えば，$\mathcal{C}a(\boldsymbol{p},-)\,\mathcal{C}^{-1} = 0$ となる）．これは，ヴァイル場には左巻き粒子と右巻き反粒子しか含まれないことの当然の帰結である．すなわち，ヴァイル方程式は荷電共役不変性を持たない．

ここで，ディラック場の双一次形の，荷電共役のもとでのふるまいを見ることにする．一般的に，異なる（素粒子に対応する）ディラック場 $\psi_1, \psi_2$ があったとして，

$$\bar{\psi}_1 \Gamma \psi_2 \tag{8.53}$$

の形の双一次形を考える．それぞれのディラック場が，荷電共役のもとで

$$\mathcal{C}\psi_1\mathcal{C}^{-1} = \eta_{C1}\psi_1^c, \tag{8.54a}$$
$$\mathcal{C}\psi_2\mathcal{C}^{-1} = \eta_{C2}\psi_2^c \tag{8.54b}$$

と変換したとすると，双一次形は

$$\mathcal{C}\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2\mathcal{C}^{-1} = (\eta_{C1}^*\eta_{C2})\bar{\psi}_1^c\Gamma\psi_2^c \tag{8.55}$$

と変換する．この右辺に現れる量 $\bar{\psi}_1^c\Gamma\psi_2^c$ は反粒子の場で書かれているが，これを粒子の場を使って書き直してみよう．

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_1^c\Gamma\psi_2^c &= -\psi_1^T C^{-1}\Gamma C\bar{\psi}_2^T \\ &= \bar{\psi}_2 C^T\Gamma^T C^{-1T}\psi_1 \\ &= \bar{\psi}_2 C\Gamma^T C^{-1}\psi_1 \\ &= \epsilon_C^{(\Gamma)}\bar{\psi}_2\Gamma\psi_1.\end{aligned} \tag{8.56}$$

符号因子 $\epsilon_C^{(\Gamma)}$ は (4.11) で与えられている．第 1 行目から第 2 行目に移る際，4 行 4 列の行列として転置を取ったが，そのとき 2 つのディラック場が反可換であることより符号が変わったのに注意しておく．この関係を用いると，粒子の場で書かれた演算子を反粒子の場を用いて書き直したり，その逆が可能となる．

$\psi_1 = \psi_2$ の場合には，

$$\bar{\psi}^c\Gamma\psi^c = \epsilon_C^{(\Gamma)}\bar{\psi}\Gamma\psi \tag{8.57}$$

であるが，特に $\Gamma = \gamma^\mu$ ととれば

$$\bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{8.58}$$

これにより，粒子で書いたカレントと反粒子で書いたカレントが符号が逆になることになり，例えば粒子の電荷と反粒子の電荷が逆符号であることは，この関係が直接示している．

さらに，$\psi$ がマヨラナ場である場合は，

$$\bar{\psi}\Gamma\psi = \epsilon_C^{(\Gamma)}\bar{\psi}\Gamma\psi \tag{8.59}$$

となり，$\Gamma = \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}$ の場合は 0 であることが言える．これは例えばマヨラナ場から（極性）ベクトルカレントが作れないことを意味する．このことは，マヨラナフェルミオンが中性で電荷を持てないことに対応する．

荷電共役のもとでの変換性に戻ると，$\psi_1 = \psi_2$ の場合，位相 $\eta_C$ によらず

$$\mathcal{C}\bar{\psi}\Gamma\psi\mathcal{C}^{-1} = \epsilon_C^{(\Gamma)}\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2 \tag{8.60}$$

が成立し，ベクトル，テンソルは荷電共役のもとで符号を変え，それ以外の 3 種類は不変であることがわかる．このように，同一のフェルミオン場の双一次形では位相が打ち消すが，異なるフェルミオン場から作った双一次形の場合は必ずしもそうはならない．

## 8.4 パリティ $P$

ディラック場のパリティ変換を 3.4.1 節にならって次のように定義する．

$$\mathcal{P}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^{-1} = \eta_P\gamma^0\psi(-\boldsymbol{x},t). \tag{8.61}$$

$\eta_P$ は（今のところ未定の）位相因子 $|\eta_P| = 1$ である．これから，ディラック共役 $\bar{\psi}$ の変換は

$$\mathcal{P}\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^{-1} = \eta_P^*\bar{\psi}(-\boldsymbol{x},t)\gamma^0 \tag{8.62}$$

となる．これを用いて，$\psi$ の荷電共役 $\psi^c = C\bar{\psi}^T$ に対するパリティ変換は

$$\mathcal{P}\psi^c(x)\mathcal{P}^{-1} = -\eta_P^*\gamma^0\psi^c(\tilde{x}) \tag{8.63}$$

で与えられる．マヨラナ場に対しては，$\psi = \psi^c$ の条件より $\eta_P = -\eta_P^*$ すなわち

$$\eta_P = \pm i \tag{8.64}$$

が課される．

パリティ変換を 2 度行うと，

$$\mathcal{P}^2\psi(x)\mathcal{P}^{-2} = {\eta_P}^2\psi(x) \tag{8.65}$$

となり，場の位相は必ずしも元に戻らないことに注意する．特にマヨラナ場の場合，$\mathcal{P}^2 = -1$ である．

ヴァイル場 $\psi_L(x) = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x)$ に対しては，ディラック場と同様

$$\mathcal{P}\psi_L(x)\mathcal{P}^{-1} = \eta_P\gamma^0\psi_L(-\boldsymbol{x},t) \tag{8.66}$$

でパリティ変換を定義すると，

$$\begin{aligned}\gamma_5\mathcal{P}\psi_L(x)\mathcal{P}^{-1} &= \eta_P\gamma_5\gamma^0\psi_L(-\boldsymbol{x},t) \\ &= -\eta_P\gamma^0\gamma_5\psi_L(-\boldsymbol{x},t) \\ &= +\eta_P\gamma^0\psi_L(-\boldsymbol{x},t)\end{aligned} \tag{8.67}$$

$$= +\mathcal{P}\psi_L(x)\mathcal{P}^{-1}$$

なので，パリティ変換した後は右巻きのヴァイル場となっている．

状態に対するパリティ変換の作用を見るため，まず $\gamma^0 u$ がどのようなスピノ

ルかを調べる．ディラック表示のスピノル (5.10)

$$u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}+m^2}\begin{pmatrix}\chi_{\theta\varphi}\\ \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E_{\boldsymbol{p}}+m}\chi_{\theta\varphi}\end{pmatrix} \tag{8.68}$$

に対し，

$$\gamma^0u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}+m}\begin{pmatrix}\chi_{\theta\varphi}\\ \dfrac{-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E_{\boldsymbol{p}}+m}\chi_{\theta\varphi}\end{pmatrix} \tag{8.69}$$

となり，これは $u(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ に等しい．また，$v$ については

$$v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}+m}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E_{\boldsymbol{p}}+m}\chi_{\overline{\theta\varphi}}\\ \chi_{\overline{\theta\varphi}}\end{pmatrix} \tag{8.70}$$

から

$$\begin{aligned}\gamma^0v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})&=\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}+m}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E_{\boldsymbol{p}}+m}\chi_{\overline{\theta\varphi}}\\ -\chi_{\overline{\theta\varphi}}\end{pmatrix}\\ &=-v(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\end{aligned} \tag{8.71}$$

である．一般の表示では，この表式からのユニタリ変換でスピノルを定義すれば同じ関係

$$\gamma^0u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=u(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}), \tag{8.72a}$$

$$\gamma^0v(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=-v(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{8.72b}$$

が成立する．

具体的な表式によらない関係としては，$u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ を特徴づける性質 $\gamma\cdot p\,u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=m\,u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ および $\gamma_5\gamma\cdot s\,u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ に左から $\gamma^0$ を作用させ，$\gamma^0$ が $\gamma^i$ および $\gamma_5$ と反可換で，自分自身とは可換であることを用いると，

$$\gamma\cdot(Pp)\,\gamma^0u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=m\,\gamma^0u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}), \tag{8.73a}$$

$$\gamma_5\gamma\cdot(Ps)\,\gamma^0u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=-\gamma^0u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{8.73b}$$

となる．ここで，ベクトルに対するパリティ変換行列

$$(P)^\mu{}_\nu=\mathrm{diag.}(1,-1,-1,-1) \tag{8.74}$$

を用いた．すなわち，$(Pp)^\mu=(E_{\boldsymbol{p}},-\boldsymbol{p})$, $(Ps)^\mu=(s^0,-\boldsymbol{s})$ である．これらの関係より，

$$\gamma^0u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=e^{i\xi}u(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{8.75}$$

が結論できる．位相 $e^{i\xi}$ はスピノルの定義（および $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{s}$）に依存する．このとき，$v = C\bar{u}^T$ で定義した $v$ に対しては

$$\gamma^0 v(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = -e^{-i\xi} v(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \tag{8.76}$$

が成立することが示せる．

展開式 (8.17) に対し (8.61) を適用すると，スピノルの位相が (8.72) をみたすものとして，

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\psi(\boldsymbol{x}, t)\mathcal{P}^{-1} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\pm s} \Big[\mathcal{P}a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})\mathcal{P}^{-1} u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{-i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \\
&\qquad + \mathcal{P}b^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})\mathcal{P}^{-1} v(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{+i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\Big] \\
&= \eta_P \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\pm s} \Big[a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) u(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{-i(E_{\boldsymbol{p}}t + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \\
&\qquad - b^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) v(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{+i(E_{\boldsymbol{p}}t + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\Big] \\
&= \eta_P \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\pm s} \Big[a(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{-i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \\
&\qquad - b^\dagger(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) v(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{+i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\Big]
\end{aligned} \tag{8.77}$$

となる．最後の等式では積分変数の $\boldsymbol{p}$ を $-\boldsymbol{p}$ と定義し直した．これより，

$$\mathcal{P}a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})\mathcal{P}^{-1} = \eta_P\, a(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}), \tag{8.78a}$$

$$\mathcal{P}b^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})\mathcal{P}^{-1} = -\eta_P\, b^\dagger(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \tag{8.78b}$$

および

$$\mathcal{P}a^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})\mathcal{P}^{-1} = \eta_P^*\, a^\dagger(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}), \tag{8.79a}$$

$$\mathcal{P}b(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})\mathcal{P}^{-1} = -\eta_P^*\, b(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \tag{8.79b}$$

が得られ，真空が $\mathcal{P}|0\rangle = |0\rangle$ をみたすとして，1 粒子状態に対し

$$\mathcal{P}\big|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, \text{粒子}\big\rangle = \eta_P^*\big|-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, \text{粒子}\big\rangle, \tag{8.80a}$$

$$\mathcal{P}\big|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, \text{反粒子}\big\rangle = -\eta_P\big|-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, \text{反粒子}\big\rangle \tag{8.80b}$$

が成り立つ．

粒子と反粒子からなる系では，パリティ変換のもとで，波動関数の空間部分の偶奇性以外に「固有パリティ」の因子 $-|\eta_P|^2 = -1$ が生じる．これが俗に「粒子と反粒子の固有パリティが逆」と言われることの正確な内容である．パリティ変換の位相を $\eta_P = \pm 1$ と選べば実際符号が逆になるが，マヨラナフェルミオンのように $\eta_P = \pm i$ ととれば，粒子と反粒子のパリティは同じ $\mp i$ であるが 2 乗すると $-1$ ということになる．

ヴァイルフェルミオンの場合は，状態のパリティ変換は定義できない．この事情は荷電共役の場合と同様で，片方のヘリシティ状態しか存在しないことによる．

次に，空間反転のもとで双一次形 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ がどう変換するかを見る．(8.61) と (8.62) より，

$$\mathcal{P}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\mathcal{P}^{-1} = \bar{\psi}(Px)\gamma^0\Gamma\gamma^0\psi(Px) \tag{8.81}$$

なので，

$$\mathcal{P}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\mathcal{P}^{-1} = \epsilon_P^{(\Gamma)}\bar{\psi}(Px)\Gamma\psi(Px)\ , \tag{8.82}$$

$$\epsilon_P^{(\Gamma)} = \begin{cases} +1 & \Gamma = 1,\, \gamma^0,\, \gamma^i\gamma_5,\, \sigma^{ij} \\ -1 & \Gamma = \gamma_5,\, \gamma^\mu,\, \gamma^0\gamma_5,\, \sigma^{0i} \end{cases} \tag{8.83}$$

となる．例えば，ベクトルの場合は時間成分の符号は変わらず，空間成分は符号が変わる．軸ベクトルはその逆であり，また，テンソルは時間・空間成分が符号が変わり，空間・空間成分は変わらない．

## 8.5 時間反転 $T$

ディラック場に対する時間反転を次で定義する．

$$\mathcal{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1} = \eta_T B\psi(\boldsymbol{x},-t). \tag{8.84}$$

$\eta_T$ は位相因子，$B$ は 4 行 4 列のユニタリ行列とする．時間反転演算子は反線形演算子で，複素数 $\alpha$ に対して

$$\mathcal{T}\alpha\mathcal{O}\mathcal{T}^{-1} = \alpha^*\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{T}^{-1} \tag{8.85}$$

と作用する．ディラック方程式 $(i\gamma\cdot\partial - m)\psi(x) = 0$ の左辺に対し，

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi(x)\mathcal{T}^{-1} &= (-i\gamma^{\mu*}\partial_\mu - m)\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} \\ &= (-i\gamma^{\mu*}\partial_\mu - m)\eta_T B\psi(\boldsymbol{x},-t). \end{aligned} \tag{8.86}$$

左から $\eta_T^* B^{-1}$ を掛けると

$$\eta_T^* B^{-1}\mathcal{T}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi(x)\mathcal{T}^{-1} = (-iB^{-1}\gamma^{\mu*}B\partial_\mu - m)\psi(\boldsymbol{x},-t). \tag{8.87}$$

$x'^\mu = (-t,\boldsymbol{x})$ を用いて，この右辺は

$$\big(+iB^{-1}\gamma^{0*}B\,\partial'_0 - iB^{-1}\boldsymbol{\gamma}^*B\cdot\nabla' - m\big)\psi(x') \tag{8.88}$$

となるので，変換後のディラック方程式 $(i\gamma\cdot\partial' - m)\psi(x') = 0$ が成立するには，行列 $B$ が

$$B^{-1}\gamma^{0*}B = \gamma^0\ , \qquad B^{-1}\gamma^{i*}B = -\gamma^i \tag{8.89}$$

をみたせばよい．ここで $\gamma^0$ がエルミート，$\gamma^i$ が反エルミートであることを用いると，(8.89) は

$$B^{-1}\gamma^{\mu T}B = \gamma^\mu \tag{8.90}$$

と書き直せる．これと荷電共役行列 $C$ のみたす条件 $C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu$ を組み合わせると

$$\gamma^\mu CB = -CB\gamma^\mu \tag{8.91}$$

を示すことができる．4 つの $\gamma^\mu$ すべてと反可換な行列は定数倍を除いて $\gamma_5$ しかないので，$CB$ は位相を除いて $\gamma_5$ に等しい．以後

$$B = C^{-1}\gamma_5 \tag{8.92}$$

と選ぶことにする．

これより，$C$ が反対称であることおよび $C\gamma_5^T C^{-1} = \gamma_5$ を用いて，$B$ が反対称行列であること

$$B^T = -B \tag{8.93}$$

を導ける．また，(8.89) をくりかえし用いて，$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ に対し

$$B\gamma_5 B^{-1} = \gamma_5^* \tag{8.94}$$

が成り立つことが示せる．

ディラック共役に対しては，(8.84) より

$$\mathcal{T}\bar{\psi}(x)\mathcal{T}^{-1} = \eta_T^*\bar{\psi}(-\tilde{x})B^\dagger\ . \tag{8.95}$$

となる．これを導く際には，$\mathcal{T}$ の反線形性により，$\mathcal{T}\bar{\psi}\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}\psi^\dagger\gamma_0\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}\psi^\dagger\mathcal{T}^{-1}\gamma_0^*$. であることに注意が必要である．

ディラック場の荷電共役に対しては，

$$\mathcal{T}\psi^c(x)\mathcal{T}^{-1} = \eta_T^* B\psi^c(\boldsymbol{x}, -t) \tag{8.96}$$

であり，マヨラナ場に対しては $\eta_T = \pm 1$ が要請される．

左巻きヴァイル場に対しては，

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\psi_L(x)\mathcal{T}^{-1} &= \mathcal{T}\tfrac{1-\gamma_5}{2}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} \\
&= \tfrac{1-\gamma_5^*}{2}\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} \\
&= \tfrac{1-\gamma_5^*}{2}\eta_T B\psi(\boldsymbol{x}, -t) \\
&= \eta_T B\tfrac{1-\gamma_5}{2}\psi(\boldsymbol{x}, -t) \\
&= \eta_T B\psi_L(\boldsymbol{x}, -t)
\end{aligned} \tag{8.97}$$

となり，荷電共役やパリティと異なって左巻きヴァイル場として変換が閉じている．

時間反転を 2 回くりかえすと位相 $\eta_T$ によらず $\mathcal{T}^2=-1$ が成立する．位相が消えるのは $\mathcal{T}$ の反線形性による．実際，

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}^{-1} &= \mathcal{T}\eta_T B\psi(-\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}\\ &= \eta_T^* B^*\mathcal{T}\psi(-\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}\\ &= \eta_T^* B^*\eta_T B\psi(x)\\ &= B^*B\psi(x)\\ &= -B^\dagger B\psi(x)\\ &= -\psi(x)\end{aligned} \tag{8.98}$$

である．(最後から 2 つめの変形で $B$ の反対称性を用いた．)

状態に対する時間反転の作用を見る準備として，$Bu$ がどのようなスピノルかを調べる．スピノル $u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ がみたす条件 $\gamma\cdot p\,u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=m\,u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ および $\gamma_5\gamma\cdot s\,u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$ に左から $B$ を作用させる．このとき，$B$ の性質 (8.89) が

$$B\gamma^\mu B^{-1}=(P)^\mu{}_\nu\gamma^{\nu*} \tag{8.99}$$

と書けること，また (8.94) を用いると，

$$\gamma^*\cdot(Pp)\,Bu(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=m\,Bu(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}), \tag{8.100a}$$

$$\gamma_5^*\gamma^*\cdot(Ps)\,Bu(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=Bu(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}), \tag{8.100b}$$

この複素共役をとれば

$$\gamma\cdot(Pp)\,B^*u^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=m\,B^*u^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}), \tag{8.101a}$$

$$\gamma_5\gamma\cdot(Ps)\,B^*u^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=B^*u^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) \tag{8.101b}$$

なので，

$$B^*u^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=e^{i\xi}u(-\boldsymbol{p},-\boldsymbol{s}) \tag{8.102}$$

が結論される．

ディラック表示のスピノル (5.10)

$$u(\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})=\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}+m}\begin{pmatrix}\chi_{\theta\varphi}\\ \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E_{\boldsymbol{p}}+m}\chi_{\theta\varphi}\end{pmatrix} \tag{8.103}$$

に対してこれを具体的に見てみる．この表示で用いている形 $C=i\gamma^2\gamma^0$ より $B=C^{-1}\gamma_5=\gamma^1\gamma^3$, 具体的な表式は

$$B = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix} \tag{8.104}$$

であることから，

$$Bu(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + m} \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi_{\theta\varphi} \\ \dfrac{-\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*}{E_{\boldsymbol{p}} + m} i\sigma_2 \chi_{\theta\varphi} \end{pmatrix} \tag{8.105}$$

となる．($\sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2 = -\sigma_i$ を用いた．) 2 成分スピノルの関係 (5.17) により，これから

$$\begin{aligned} Bu(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) &= \sqrt{E_{\boldsymbol{p}} + m} \begin{pmatrix} -\chi_{\overline{\theta\varphi}} \\ \dfrac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\boldsymbol{p}} + m} \chi_{\overline{\theta\varphi}} \end{pmatrix}^* \\ &= -u^*(-\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}) \end{aligned} \tag{8.106}$$

が得られる．また $Bu(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}) = +u^*(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})$ である．負エネルギーのスピノルに対しては，これらの関係から $v = C\bar{u}^T$ を用いて

$$Bv(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) = -v^*(-\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}), \tag{8.107}$$

$$Bv(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}) = v^*(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \tag{8.108}$$

が導ける（よい練習問題）．

さて，ディラック場の時間反転変換 (8.84) に生成消滅演算子による展開式 (8.17) を代入する．ここでは，スピン自由度の和としては $\boldsymbol{s}$ と $\bar{\boldsymbol{s}}$ を用いることにする．スピノルの位相が上の関係式をみたすものとして，

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\psi(\boldsymbol{x}, t)\mathcal{T}^{-1} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\text{spin}} \Big[\mathcal{T} a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \mathcal{T}^{-1} u^*(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{+i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \\ &\qquad + \mathcal{T} b^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \mathcal{T}^{-1} v^*(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{-i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\Big] \\ &= \eta_T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\text{spin}} \Big[a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) Bu(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{-i(-E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \\ &\qquad + b^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) Bv(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{+i(-E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\Big] \\ &= \eta_T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{\text{spin}} \Big[\pm a(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) u^*(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}) e^{+i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \\ &\qquad \pm b^\dagger(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) v^*(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}) e^{-i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\Big] \end{aligned} \tag{8.109}$$

となる．最後の等式では積分変数の $\boldsymbol{p}$ を $-\boldsymbol{p}$ と定義し直した．これより，

$$\mathcal{T} a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \mathcal{T}^{-1} = \eta_T\, a(-\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}), \tag{8.110a}$$

$$\mathcal{T} a(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}) \mathcal{T}^{-1} = -\eta_T\, a(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}), \tag{8.110b}$$

$$\mathcal{T} b^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \mathcal{T}^{-1} = \eta_T\, b^\dagger(-\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}), \tag{8.110c}$$

$$\mathcal{T} b^\dagger(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}) \mathcal{T}^{-1} = -\eta_T\, b^\dagger(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) \tag{8.110d}$$

が得られ，真空が $\mathcal{T}\big|0\big\rangle = \big|0\big\rangle$ をみたすとして，1 粒子状態に対し

$$\mathcal{T}\big|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, 粒子\big\rangle = \eta_T^*\big|-\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}, 粒子\big\rangle, \tag{8.111a}$$

$$\mathcal{T}\big|\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}, 粒子\big\rangle = -\eta_T^*\big|-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, 粒子\big\rangle, \tag{8.111b}$$

$$\mathcal{T}\big|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, 反粒子\big\rangle = \eta_T\big|-\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}, 反粒子\big\rangle, \tag{8.111c}$$

$$\mathcal{T}\big|\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{s}}, 反粒子\big\rangle = -\eta_T\big|-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, 反粒子\big\rangle \tag{8.111d}$$

が成り立つ．このように，時間反転によって状態の運動量，スピンの両方が向きを変えるが，これは古典力学において，時間反転のもとで運動量 $\boldsymbol{p} = m\, d\boldsymbol{x}/dt$, 角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ が符号を変えることと一致している．

荷電共役，空間反転の場合と異なり，ヴァイルフェルミオンに対しても状態の変換は上で得られたものとなる．これは，時間反転により運動量，スピンの双方が符号を変えるため，ヘリシティは変わらないことによる．

次に，時間反転のもとで双一次形 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ がどう変換するかを見る．変換 (8.84) と (8.95) より，

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\mathcal{T}^{-1} &= \mathcal{T}\bar{\psi}(x)\mathcal{T}^{-1}\Gamma^*\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} \\ &= \eta_T^*\bar{\psi}(\boldsymbol{x}, -t)B^\dagger\Gamma^*\eta_T B\psi(\boldsymbol{x}, -t) \\ &= \bar{\psi}(\boldsymbol{x}, -t)B^{-1}\Gamma^* B\psi(\boldsymbol{x}, -t) \end{aligned} \tag{8.112}$$

であるが，上で見たように $B^{-1}\gamma^{\mu *}B = (P)^\mu{}_\nu\gamma^\nu$, $B^{-1}\gamma_5^* B = \gamma_5$ であることを使うと，

$$B^{-1}\Gamma^* B = (P)\Gamma = \epsilon_T^{(\Gamma)}\Gamma\ , \tag{8.113}$$

符号 $\epsilon_T^{(\Gamma)}$ は，$\Gamma$ の持つ脚のうち空間成分の数の偶奇である．すなわち，$\Gamma = \gamma^i$, $\gamma^i\gamma_5$, $\sigma^{0i}$ の場合は符号が変わり，それ以外は変わらない．

## 8.6 $CP$ 変換

$CP$ 変換は荷電共役と空間反転を続けて行う変換である．順序によりその結果は位相が異なる．

$$\mathcal{CP}\psi(x)\,(\mathcal{CP})^{-1} = -\eta_C\eta_P C\psi^*(-\boldsymbol{x}, t)\ , \tag{8.114}$$

$$\mathcal{PC}\psi(x)\,(\mathcal{PC})^{-1} = \eta_C\eta_P^* C\psi^*(-\boldsymbol{x}, t)\ . \tag{8.115}$$

マヨラナ場に対しては（あるいはディラック場でも $\eta_P = \pm i$ とすれば）$CP = PC$ である．ヴァイル場に対しては，荷電共役，空間反転の両方ともカイラリティ（$\gamma_5$ の固有値）を逆転するので，$CP$ ではカイラリティが変化せず，状態に対しても $CP$ 変換を定義できる．また（自由）ヴァイル場のラグランジアンは $C, P$ のいずれに対しても不変でないが，$CP$ のもとでは不変である．

## 8.7 *CPT* 変換と CPT 定理

$CPT$ 変換は荷電共役，空間反転に加えて時間反転も行うものである．$C, P, T$ の順序は 6 通りあり，結果は位相を除いて同一である．これらを一般的に $I$ と書くと，

$$\mathcal{I}\psi(x)\mathcal{I}^{-1} = \eta_I \gamma_5^* \psi^*(-x) \tag{8.116}$$

となる．位相 $\eta_I$ は

| $I$ | $\eta_I$ |
|---|---|
| $CPT$ | $-\eta_P\eta_C\eta_T$ |
| $PCT$ | $\eta_P^*\eta_C\eta_T$ |
| $CTP$ | $-\eta_P^*\eta_C\eta_T$ |
| $PTC$ | $\eta_P^*\eta_C^*\eta_T^*$ |
| $TCP$ | $-\eta_P^*\eta_C^*\eta_T^*$ |
| $TPC$ | $\eta_P\eta_C^*\eta_T^*$ |

で与えられる．(8.116) より

$$\mathcal{I}\psi^*(x)\mathcal{I}^{-1} = \eta_I^* \gamma_5 \psi(-x) \tag{8.117}$$

なので，

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\psi^c(x)\mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I}C\gamma^{0T}\psi^*(x)\mathcal{I}^{-1} \\
&= C^*\gamma^{0\dagger}\mathcal{I}\psi^*(x)\mathcal{I}^{-1} \\
&= C^*\gamma^0\,\eta_I^*\gamma_5\psi(-x) \\
&= -\eta_I^* C^*\gamma_5\gamma^0\psi(-x) \\
&= -\eta_I^*\gamma_5^* C^*\gamma^0\psi(-x) \\
&= -\eta_I^*\gamma_5^*(\psi^c)^*(-x).
\end{aligned} \tag{8.118}$$

最後から 2 番目の変形で $\gamma_5^* C^* = C^*\gamma_5$ を用いた．

今後 $CPT$ 変換の位相を $\eta_I = i$ と固定することにする．こう選ぶと $\psi$ と $\psi^c$ の変換がそろい，またマヨラナ場の場合にも矛盾がない．また，ヴァイル場に

対しても同様に $CPT$ 変換が定義できる．

次に，これらのスピン 1/2 粒子の場の双一次形の変換性を調べる．いま，$\psi_1$ と $\psi_2$ は一般に異なる粒子の場として（中に $\psi^c$ が混じっていてもよい）

$$\mathcal{B}(x) = f\bar{\psi}_1(x)\Gamma\psi_2(x) \tag{8.119}$$

とおく．$f$ は複素数とする（以下では結合定数と解釈すると思っておいてよい）．この $CPT$ 変換は，

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\mathcal{B}(x)\mathcal{I}^{-1} &= f^*\mathcal{I}\psi_1^\dagger(x)\mathcal{I}^{-1}\gamma^{0*}\Gamma^*\,\mathcal{I}\psi_2(x)\mathcal{I}^{-1} \\ &= f^*\,(-i)\psi_1^T(-x)\gamma_5^T\gamma^{0*}\Gamma^*\,i\gamma_5^*\psi_2^*(-x) \\ &= -f^*\psi_2^\dagger(-x)\gamma_5^\dagger\Gamma^\dagger\gamma^{0\dagger}\gamma_5^\dagger\psi_1(-x) \\ &= -f^*\psi_2^\dagger(-x)\gamma_5\Gamma^\dagger\gamma^0\gamma_5\psi_1(-x) \\ &= f^*\bar{\psi}_2(-x)\gamma^0\gamma_5\Gamma^\dagger\gamma_5\gamma^0\psi_1(-x).\end{aligned} \tag{8.120}$$

2 行目から 3 行目に移す際には全体の転置を取った．フェルミオン場の反可換性により符号が変わっている．ここで，まず

$$\gamma_5\Gamma\gamma_5 = \epsilon_I^{(\Gamma)}\Gamma \tag{8.121}$$

と書ける．$\Gamma$ が奇数個の $\gamma^\mu$ からなる場合は $\epsilon_I^{(\Gamma)} = -1$, 偶数個の場合は $+1$ である．すなわち

$$\epsilon_I^{(\Gamma)} = \begin{cases} +1 & \Gamma = 1,\, \gamma_5,\, \sigma^{\mu\nu} \\ -1 & \Gamma = \gamma^\mu,\, \gamma^\mu\gamma_5 \end{cases} \tag{8.122}$$

さらに，$\bar{\Gamma} = \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$ と定義すると

$$\mathcal{I}\mathcal{B}(x)\mathcal{I}^{-1} = \epsilon_I^{(\Gamma)} f^*\bar{\psi}_2(-x)\bar{\Gamma}\psi_1(-x) \tag{8.123}$$

となるが，この右辺は

$$\mathcal{I}\mathcal{B}(x)\mathcal{I}^{-1} = \epsilon_I^{(\Gamma)}\,\mathcal{B}^\dagger(-x) \tag{8.124}$$

に等しい．符号が変わるのは $\mathcal{B}$ がベクトルの場合で，スカラー，2 階テンソルの場合は同符号となる．

さて，**CPT 定理**とは，非常に一般性のある仮定の下で，相対論的な量子場理論が $CPT$ 変換のもとで不変であるという定理である．これには公理論的な証明が存在するが，もともとはパウリらにより構成的に示された．具体的には，$CPT$ 変換のもとで，ラグランジアン密度が

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(-x) \tag{8.125}$$

となることを示せばよい．ここでは，スピン 1/2 の粒子の場に加えて，スカラー場およびベクトル場からなる理論を考える．（テンソル場など高い整数スピンの

場があってもよい.)

それには，スカラー場，ベクトル場の $CPT$ 変換を定義しなければならないが，ここでは詳細な議論は省いて，複素スカラー場 $\varphi(x)$，複素ベクトル場 $W_\mu(x)$ に対し

$$\mathcal{I}\varphi(x)\mathcal{I}^{-1} = +\varphi^*(-x), \tag{8.126}$$

$$\mathcal{I}W_\mu(x)\mathcal{I}^{-1} = -W_\mu^*(-x) \tag{8.127}$$

とできる．粒子と反粒子が入れ替わることから，場はその複素共役に変換される．変換の位相を適当に選ぶことにより，上のようになる．粒子と反粒子が同じ実スカラー場，実ベクトル場に対しては $CPT$ 変換により自分自身に戻る．

これから，ラグランジアン密度が一般に $CPT$ 対称性を持つことがわかる．まず，ローレンツ不変性より，$\mathcal{L}$ はスカラーである．このためには，ラグランジアン密度の各項において，スピン 1/2 の場は偶数個ずつ，決まったローレンツ変換性を持つスカラー，ベクトルなどに組み合わさり，これとスカラー場，ベクトル場を含めて（場の微分を含んで）全体としてローレンツの添字がすべて縮約されていることが必要である．$CPT$ 変換により $x^\mu \to -x^\mu$ と変換されるので，微分 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ も符号を変える．今までの議論から，ベクトル量は $CPT$ 変換ですべて符号を変えるので，全体がスカラーとなっていれば符号は変わらない．

次に，ラグランジアン密度はエルミートであることが要請される．このためには，ラグランジアン密度の各項は，自分自身がエルミートであるか，そうでなければ，エルミート共役との和の形になっていなければならない．上で見た場と結合定数（一般に複素数）の変換性から，$CPT$ 変換のもとでの対称性が言えたことになる．

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}^\dagger(-x) = \mathcal{L}(-x) \tag{8.128}$$

となることが見てとれ，一般的に相対論的な場の理論の $CPT$ 不変性が言えたことになる．

## 8.8 相互作用と変換の位相

前節までで，自由ディラック方程式が荷電共役，空間反転，時間反転の対称性を持っていることが再確認された．ディラック場のラグランジアンもこれらの変換のもとで形を変えないことも確かめられる．マヨラナ場でも同じであるが，ヴァイル場の場合は，$P$, $C$ の対称性を持たず，$CP$, $T$ では対称となる．これらの結論は，変換の定義に含まれる位相ないし符号因子には特に依存していなかった．しかし，複数の異なる場からなる相互作用項を考えると，一般にこの位相が重要となる．

まず，比較的簡単な場合として，電子と電磁場の相互作用を考えよう．相互作用ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{\rm int}(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) \tag{8.129}$$

と書くことができる．ここでまず $A_\mu$ は外から与えた外場（古典場）$A_\mu^{(\rm ext)}(x)$ として $\mathcal{L}_{\rm int}$ に対し荷電共役変換を行うと

$$\mathcal{C}\mathcal{L}_{\rm int}\,\mathcal{C}^{-1} = e\bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c A_\mu^{(\rm ext)} \tag{8.130}$$

であるが，これを $\psi$ で書き直すと

$$\mathcal{C}\mathcal{L}_{\rm int}\,\mathcal{C}^{-1} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu^{(\rm ext)} \tag{8.131}$$

となり，元と符号が変わる．これは，電子とその反粒子である陽電子は逆符号の電荷を持っていることによる．ここで，電磁場を外場でなくダイナミカルな量子場として，その荷電共役変換を

$$\mathcal{C}A^\mu(x)\,\mathcal{C}^{-1} = -A^\mu(x) \tag{8.132}$$

と定義すると，相互作用項の変換は

$$\mathcal{C}\mathcal{L}_{\rm int}\,\mathcal{C}^{-1} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{8.133}$$

となり，変換前と同じになる．すなわち，電磁場の変換を (8.132) とすると，相互作用は荷電共役不変性を持つことがわかる．

同様に，電磁場のパリティ変換を

$$\mathcal{P}A^\mu(x)\mathcal{P}^{-1} = P^\mu{}_\nu A^\nu(-\boldsymbol{x}, t) \tag{8.134}$$

（$\boldsymbol{A}$ が符号を変え，$A^0$ は変わらない）と定義すると，相互作用項は

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_{\rm int}(x)\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{L}_{\rm int}(-\boldsymbol{x}, t) \tag{8.135}$$

となり，電磁相互作用は空間反転不変性を持つ．このように，電磁相互作用は $C$, $P$, $T$ のそれぞれに対して対称であることが言える．

もし，あるベクトル場 $A'_\mu(x)$ があって

$$\mathcal{L}_{\rm int}(x) = g\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)A'_\mu(x) \tag{8.136}$$

という相互作用を持っていると，上と同じ変換ではパリティ不変にならないが，$A'_\mu$ がパリティ変換で上と逆の変換をする（軸ベクトルとして変換する）ようにパリティを定義すれば，不変となっている．しかし，$\gamma^\mu$ と $\gamma^\mu\gamma_5$ の両方の結合が混在している場合には，不変にはならない．

このように，変換の位相（この場合は $A^\mu$ が実場なので符号）をうまく選んで相互作用項が不変にできるならば，その相互作用は不変性を持っていると言

え，逆にどのように選んでも不変にできない場合は対称性がないということができる．

次に，位相が出てくる例として，複素場の関係するクォークと $W$ 粒子の相互作用（弱い相互作用）を考えてみる．

$$\mathcal{L}_{\rm int}(x) = -G\,\bar{u}(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)d(x)\,W^*_\mu(x). \tag{8.137}$$

$u(x)$ は電荷 $+(2/3)e$，$d(x)$ は電荷 $-(1/3)e$ のクォークの場であり，$W_\mu(x)$ は $W^-$ 粒子の場，$G$ は相互作用の結合定数である．この相互作用項は，上の議論よりわかるように，パリティ不変性を持たず，また荷電共役のもとでも不変でない．これは，この相互作用がヴァイル場を用いて

$$\mathcal{L}_{\rm int} = -2G\,\bar{u}_L\gamma^\mu d_L\,W^*_\mu \tag{8.138}$$

と書けることからもわかる．弱い相互作用は，このように空間反転および荷電共役の不変性を「最大に」破っている．

次に，$CP$ 変換を考えるが，その前に，相互作用項 (8.137) はエルミートでないので，ラグランジアン密度には，この項とそのエルミート共役

$$\mathcal{L}^\dagger_{\rm int} = -G^*\,\bar{d}\gamma^\mu(1-\gamma_5)u\,W_\mu \tag{8.139}$$

が和の形で含まれていなければならないことに注意する．さて，それぞれの場が $CP$ 変換のもとで

$$u(x) \to \eta^{(u)}_{CP}Cu^*(Px), \tag{8.140a}$$
$$d(x) \to \eta^{(d)}_{CP}Cd^*(Px), \tag{8.140b}$$
$$W^\mu(x) \to -P^\mu{}_\nu W^\nu(Px) \tag{8.140c}$$

と変換したとして[*4]，相互作用項 (8.137) は

$$\mathcal{CP}\mathcal{L}_{\rm int}(x)\,(\mathcal{CP})^{-1} = -\eta^{(u)}_{CP}{}^*\eta^{(d)}_{CP}G\,\bar{d}(Px)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(Px)\,W^\mu(Px) \tag{8.141}$$

と変換する．これは最初の 2 つの位相因子を無視すると，$\mathcal{L}^\dagger_{\rm int}(Px)$ において，結合定数 $G^*$ を $G$ に変えたものになっている．(逆に，$\mathcal{L}^\dagger_{\rm int}$ の $CP$ 変換は，同様の定数の部分の違いを除いて，$\mathcal{L}_{\rm int}(Px)$ になる.）ということは，仮に $CP$ 変換の位相を $\eta^{(u)}_{CP} = \eta^{(d)}_{CP} = 1$ に選んだとすると，結合定数 $G$ が実数のときのみ理論は $CP$ 対称性を持つことになる[*5]．しかし，$G$ が虚数部を持つ場合

*4) $W$ の変換に位相を含ませることもできるが，そうしても特に新しい状況は生まれない．これは，電荷の保存則に対応して，場の位相を電荷に比例して一斉に変える位相変換の自由度があるためである．

*5) この意味で，$CP$ 不変性と結合定数が実であることが等価であるような言い方がしばしばされる．

でも，位相 $\eta_{CP}^{(u)}, \eta_{CP}^{(d)}$ を適当に選ぶと，ラグランジアンは $CP$ 不変にできる．したがって，この相互作用だけに限れば，必ず $CP$ 対称性があるという結論が得られる．

しかし，話には続きがあり，同じ電荷を持つクォークが複数存在するときは，それぞれのクォークの $CP$ 変換の位相をうまく調整して，$W$ との相互作用のすべての組合せが $CP$ 不変になるようにできるかどうかは自明ではない．実際，小林・益川が示したように，クォークが 6 種類以上存在する場合はどのように位相を選んでも一般には $CP$ 対称性を持たないことが知られている．

なお，$CPT$ 対称性は常に成り立っているので，$CP$ 対称性が破れている場合には同時に時間反転の対称性も破れている．

## 8.9 粒子と反粒子の 2 体系

スピン 1/2 の粒子とその反粒子からなる 2 体系が非相対論的に取り扱えるとする．重心系における系の状態を記述するには，相対運動の（軌道）波動関数と，スピン波動関数を指定すればよい．まず，それぞれの粒子のスピンを $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ とすると，全スピン $\boldsymbol{S}$ を

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 \tag{8.142}$$

で定義できる．$S$ の大きさは，2 つのスピンの合成則より，$s = 0$ または 1 である．スピン 1 の独立な状態は 3 つ

$$\left|\uparrow\right\rangle_1\left|\uparrow\right\rangle_2, \qquad \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\uparrow\right\rangle_1\left|\downarrow\right\rangle_2 + \left|\downarrow\right\rangle_1\left|\uparrow\right\rangle_2\Big), \qquad \left|\downarrow\right\rangle_1\left|\downarrow\right\rangle_2, \tag{8.143}$$

スピン 0 の状態が 1 つ

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\uparrow\right\rangle_1\left|\downarrow\right\rangle_2 - \left|\downarrow\right\rangle_1\left|\uparrow\right\rangle_2\Big) \tag{8.144}$$

存在する．2 つのスピンの入れ替えに対し，スピン 1 の波動関数は対称，スピン 0 は反対称であることに注意する．この符号は $(-1)^{s+1}$ と表せる．

次に軌道部分の波動関数を $\Psi(\boldsymbol{x})$ とし，これに対応する運動量空間の波動関数（フーリエ変換）を

$$\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\Psi(\boldsymbol{x}) \tag{8.145}$$

とすると，2 体系の状態 $\left|\Psi\right\rangle$ を（規格化を除き）スピン 1/2 粒子の 2 粒子状態 $\left|\boldsymbol{p}_1;\boldsymbol{p}_2\right\rangle$ によって

$$\left|\Psi\right\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}}\,\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q})\left|\boldsymbol{q};-\boldsymbol{q}\right\rangle \tag{8.146}$$

と表すことができる*6)．ここで $M$ は 2 体系状態の全質量である．スピン波動

*6) 右辺の状態は重心運動の波動関数を含んでおり，ノルムを全空間で積分すると $V \to (2\pi)^3\delta^3(0)$ $(V \to \infty)$ である．

関数を $\chi_{s_1 s_2}$（具体的には上で示したもの）としてスピン部分も加えると，

$$\big|\Psi\big\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}} \sum_{s_1 s_2} \chi_{s_1 s_2} \widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q}) \big|\boldsymbol{q}, s_1; -\boldsymbol{q}, s_2\big\rangle. \tag{8.147}$$

これはさらに

$$\big|\Psi\big\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}} \sum_{s_1 s_2} \chi_{s_1 s_2} \widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q})\, a^\dagger(\boldsymbol{q}, s_1) b^\dagger(-\boldsymbol{q}, s_2) \big|0\big\rangle \tag{8.148}$$

と書ける．

さて，空間部分の波動関数が軌道角運動量の大きさ $\ell$ を持っているとする．2 体系の全角運動量は $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ であるが，$s = 0$ の場合には，$j = \ell$, $s = 1$ の場合は $j = \ell - 1,\ \ell,\ \ell + 1$ の状態がある．（ただし $\ell = 0$ のときは例外的で $j = s = 0,\ 1$ のみ．）

荷電共役や空間反転のもとでのこれらの状態の変換性を調べる．波動関数 $\Psi$ は $\Psi(\boldsymbol{x}) = R(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ と書けるが，このとき $\boldsymbol{q}$ を極座標 $(q,\ \theta_q,\ \varphi_q)$ で表すと，

$$\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q}) = R_q(q) Y_{\ell m}(\theta_q, \varphi_q) \tag{8.149}$$

と書ける*7)．$\boldsymbol{q}$ の符号を逆にしたとき，球面調和関数の性質より $\widetilde{\Psi}(-\boldsymbol{q}) = (-1)^\ell \widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q})$ となる*8)．

準備ができたので，まず状態 (8.148) が荷電共役のもとでどのように変換するかを調べる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\big|\Psi\big\rangle &= |\eta_C|^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}} \sum_{s_1 s_2} \chi_{s_1 s_2} \widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q})\, b^\dagger(\boldsymbol{q}, s_1) a^\dagger(-\boldsymbol{q}, s_2) \big|0\big\rangle \\
&= -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}} \sum_{s_1 s_2} \chi_{s_1 s_2} \widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q})\, a^\dagger(-\boldsymbol{q}, s_2) b^\dagger(\boldsymbol{q}, s_1) \big|0\big\rangle \\
&= -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}} \sum_{s_1 s_2} \chi_{s_2 s_1} \widetilde{\Psi}(-\boldsymbol{q})\, a^\dagger(\boldsymbol{q}, s_1) b^\dagger(-\boldsymbol{q}, s_2) \big|0\big\rangle \\
&= -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}} \sum_{s_1 s_2} (-1)^{s+1} \chi_{s_1 s_2} (-1)^\ell \widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q})\, a^\dagger(\boldsymbol{q}, s_1) b^\dagger(-\boldsymbol{q}, s_2) \big|0\big\rangle \\
&= (-1)^{\ell + s} \big|\Psi\big\rangle\,.
\end{aligned} \tag{8.150}$$

---

*7） これは例えば，公式

$$e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} = 4\pi \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(qr) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y^*_{\ell m}(\theta_q, \varphi_q)$$

（$j_\ell$ は $\ell$ 次の球ベッセル関数，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{q}$ を極座標表示でそれぞれ $(r, \theta, \varphi)$, $(q, \theta_q, \varphi_q)$ としている）よりわかる．

*8） これは，性質 $Y_{\ell m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ によるが，このことは，$\ell$ 次の球面調和関数が $\boldsymbol{x}/r$ の $\ell$ 次同次多項式に書けることに注意すれば納得できる．付録 C も参照．

1 行目から 2 行目へは粒子と反粒子の生成演算子の順序を入れ替え，フェルミ統計による符号が生じた．2 行目から 3 行目へは，$-\boldsymbol{q}$ を改めて $\boldsymbol{q}$ と書き，$s_1$ と $s_2$ の名前をつけかえた．結果は，軌道およびスピン波動関数の対称・反対称による符号にフェルミ統計による $-1$ を合わせたものとなっている．

なお，粒子と反粒子が同一のマヨラナの場合は，そもそも $\mathcal{C}=1$ なので，(8.150) は $\big|\Psi\big\rangle$ に等しく，$(-1)^{\ell+s}=1$ をみたす状態しか存在しない．(別の言い方をすると，この場合は同種粒子系となるので，フェルミ統計と矛盾しないという条件から荷電共役 $+$ の状態だけが選ばれる．)

次に，空間反転に対しては

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}\big|\Psi\big\rangle &= -|\eta_P|^2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}}\sum_{s_1 s_2}\chi_{s_1 s_2}\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q})\,a^\dagger(-\boldsymbol{q},s_1)a^\dagger(\boldsymbol{q},s_2)\big|0\big\rangle \\
&= -\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}}\sum_{s_1 s_2}\chi_{s_1 s_2}\widetilde{\Psi}(-\boldsymbol{q})\,a^\dagger(\boldsymbol{q},s_1)b^\dagger(-\boldsymbol{q},s_2)\big|0\big\rangle \\
&= -\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}}\sum_{s_1 s_2}\chi_{s_1 s_2}(-1)^\ell\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q})\,a^\dagger(\boldsymbol{q},s_1)b^\dagger(-\boldsymbol{q},s_2)\big|0\big\rangle \\
&= (-1)^{\ell+1}\big|\Psi\big\rangle
\end{aligned}
\tag{8.151}
$$

となる．空間反転ではスピンは変化しないので，結果は軌道部分からくる符号に，粒子・反粒子の内部パリティからくる $-1$ を合わせたものとなる．

以下の表に，$\ell=0,1,2$ の場合の系の量子数と，それを表すのによく使用される記法をまとめておく．

| $\ell$ | $s$ | $j$ | $P$ | $C$ | $J^{PC}$ | ${}^{2s+1}L_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $-$ | $+$ | $0^{-+}$ | ${}^1S_0$ |
| 0 | 1 | 1 | $-$ | $-$ | $1^{--}$ | ${}^3S_1$ |
| 1 | 0 | 1 | $+$ | $-$ | $1^{+-}$ | ${}^1P_1$ |
| 1 | 1 | $0,1,2$ | $+$ | $+$ | $0^{++},1^{++},2^{++}$ | ${}^3P_0,{}^3P_1,{}^3P_2$ |
| 2 | 0 | 2 | $-$ | $+$ | $2^{-+}$ | ${}^1D_2$ |
| 2 | 1 | $1,2,3$ | $-$ | $-$ | $1^{--},2^{--},3^{--}$ | ${}^3D_1,{}^3D_2,{}^3D_3$ |

この節の考察は，例えば電子・陽電子の束縛状態であるポジトロニウムや，非相対論的クォーク模型におけるメソン（クォークと反クォークからなる状態）がどのような量子数を持つかという問題などに適用できる．例えば，ポジトロニウムの 1S 状態は対消滅していくつかの光子になるが，電磁相互作用は荷電共役対称性を持ち，光子は荷電共役奇であるため，$J^{PC}=0^{-+}$ の状態（パラ

ポジトロニウム）は主に 2 つの光子，$J^{PC} = 1^{--}$ の状態（オルソポジトロニウム）は主に 3 つの光子に崩壊する．崩壊率は光子の数が 1 つ増えるごとに $\alpha$ の因子がかかるので，オルソポジトロニウムの方が寿命が桁違いに長い．

# 第 9 章
# 終章

## 9.1 さいごに

ディラック方程式・ディラック場の導入の主な方法には大きく分けて 2 つの流儀がある．1 つは本書で用いたディラックの原論文に沿った方法であり，もう 1 つは群論的な導入である．後者では場のローレンツ変換のもとでの変換性の議論からまずヴァイル場が導入され，それからディラック場を構成するという順序となる．群論的な対称性原理に基づいた方法は，スピンを持つ粒子の相対論的な場の理論の全体像が明確になる利点があるが，一方では非相対論的な量子力学とのつながりが見えづらく初心者にはとっつきにくい．また，スピンを持つ場の変換性と粒子（状態）の変換性の関係にすっきりしない部分がある．これらの理由により，本書では伝統的な方法を用いた．また，これに限らず群論的な考え方は最低限にとどめることとした．

対称性を用いた見方からは明確になることであるが，ディラック場は広い範囲の適用対象がある．ディラックは，電子を記述する相対論的な方程式としてディラック方程式を見出したが，ディラック場は一般性を持っており，電子に限らず一般のスピン 1/2 粒子を記述できる．物質を構成する素粒子であるクォーク・レプトンがスピン 1/2 を持っていることは，ディラック場が自然界の物理法則の中で根本的な位置を占めることにつながる．クォーク・レプトンの物理，つまりその相互作用を記述するには相対論的な量子場の理論が用いられるが，電磁相互作用を記述する QED および強い相互作用を記述する QCD (Quantum Chromodynamics) は，6 種類のクォーク・レプトンのそれぞれに対応するディラック場と，相互作用を媒介する素粒子である光子，グルーオンの場によって書かれる．また，これらに加えて弱い相互作用，さらにクォーク・レプトンの質量生成機構まで含んだ素粒子の標準理論においては，クォーク・レプトンの左巻き，右巻き成分にそれぞれ相当するヴァイル場と，光子，グルーオン，W 粒子を含むゲージ場，そしてスピンを持たないヒッグス場によって書かれている．

これらの相互作用はラグランジアン密度によって記述されるわけであるが，例えば電子と光子の相互作用は

$$\mathcal{L}_{\rm int}(x) = e\,\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\,A_{\mu}(x) \tag{9.1}$$

と書かれる．これは光子が「同じ時空点にいる」電子と相互作用することを意味している．これは，電子が点電荷でひろがりを持たないことと解釈できる．

点状でなく構造を持つ複合粒子で，粒子全体として固有の角運動量 1/2 を持っている場合（例えば陽子のような）でも，その「重心運動」に限ればディラック方程式で記述することができる．そもそも電子にしても，現在までに行われた実験からは構造を持っている証拠はないものの，完全に点粒子であるかどうかはわからないのである．電子の下部構造に対する実験的制限としてもっとも強力なのは，電子の磁気双極子モーメントの測定である．これはディラック方程式による回転磁気比の値 $g = 2$ からわずかにずれているが，このずれは電磁相互作用などの高次補正からくる効果の予測と一致しており，理論値と測定値は $10^{-11}$ 以内で等しい．電子が構造を持っていれば，一般に理論からのずれが予想される．このずれが電子のひろがりに比例していると仮定すれば，電子の大きさは $10^{-23}$ m 以下，2 乗に比例しているとすれば $10^{-18}$ m 以下となる．いわゆる超弦理論では，素粒子は 1 次元的なひろがりを持つことになるが，そのスケールは重力定数 $G_N$ によって定まり，$10^{-34}$ m ほどと予測され，現在の制限よりはるかに小さい．

いずれにしても，実験の行われるスケール（典型的にはその実験を特徴づけるエネルギースケール，実験の解像力はその逆数に比例する）に比べて，非常に小さい構造の効果は，大きさに比例して小さくなると予想される．その構造に対応するエネルギースケール（構造に相当する長さを $a$ とすれば $\hbar c/a$），あるいはより一般的に，何か未知の物理の関係するエネルギースケールが非常に大きい場合，それのもたらす効果は，点粒子の理論の枠組の中では，付加的な相互作用項として現れる．例を 1 つ挙げると，

$$\mathcal{L}_{\rm int}(x) = \frac{e}{2M}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)\,F_{\mu\nu}(x) \tag{9.2}$$

という相互作用項は，(9.1) と同様に電子と光子の相互作用であるが，形が異なっている．この項が存在すると，回転磁気比が 2 からずれ，

$$g = 2 + \frac{2m}{M} \tag{9.3}$$

となることがわかる．定数 $M$ はエネルギー（あるいは質量）の次元を持つ量で，電子の構造のスケールに対応する．$M$ が大きくなればなるほど，電子の磁気モーメントに対する効果は小さくなる．

相互作用 (9.1) と (9.2) の差は，その係数（結合定数）が (9.1) は無次元の $e$ であるが，(9.2) ではエネルギーの逆数の次元を持っていることにある．この

違いは，場の演算子の積の部分の次元の差から来ている．まず場のもつ次元を見ると，ディラック場 $\psi$ はエネルギーの次元 3/2 を持ち，電磁場 $A^\mu$ は次元 1 を持つ．これを導くには，作用が無次元なのでラグランジアン密度は次元 4 となり，また $\partial/\partial x^\mu$ が次元 1 を持つことに注意して，場の運動項の形 $i\bar{\psi}\gamma\cdot\partial\psi$ などから場の次元が得られる．これを用いて，(9.1) と (9.2) の演算子の部分はそれぞれ次元 4, 5 となるので，結合定数の次元がわかる．

一般に，演算子の次元が 4 より大きいと，結合定数はエネルギーの逆ベキの次元を持つが，これらに対応する相互作用は，構造，あるいは何か新しい物理のエネルギースケールの逆ベキに比例して小さな効果しか持たないと期待される．これらの相互作用は，いわゆるくりこみ不可能な相互作用となっている．一方，次元が 4 かそれ以下の演算子からなる相互作用はくりこみ可能であり，理論の計算可能性が保証される性質のよい相互作用である．

## 9.2 さらに勉強するために

ディラックの原論文 [4], [5] は量子力学の創設間もない時期のものであるが，現在オープンアクセスで読むことができる．フォルディ・ヴォートホイゼンの原論文 [7] は大学図書館などで読める．

ディラック方程式の 1 体問題としての記述は，量子力学の教科書の多くに含まれており，ディラック自身の古典 [6] のほか，例えばシッフ [11]，メシア [8] など，また特徴のあるものとしてベーテ・サルピータの本 [1] がある．日本語の本でいわゆる相対論的量子力学の部分を扱ったものとしては西島 [9] がある．

ディラック方程式についての 1 つのスタンダードはビョルケン・ドレルによる 2 冊本 [2], [3] であろう．1 冊目はディラック方程式の詳しい議論に引き続いて，場の理論を使わずにさまざまな素粒子過程の計算が具体的に記述されている．2 冊目では場の量子化が扱われている．

群論的な立場からの本としては，ラモン [10] あたりがはしりだろうか．これはすっきりした記述の書である．

# 付録 A
# 電磁気

電磁気といえば反射的にマクスウェル方程式が頭に浮かぶかもしれないが，マクスウェル方程式は電磁気の理論の半分であって，残りの半分はローレンツ力の法則である．ここでは，電磁場中の荷電粒子の従う法則を，古典力学，量子力学，相対論にわたってまとめる．

## A.1 荷電粒子の古典力学

荷電粒子と電磁場からなる系を記述する法則は，大きくわけて２つからなる．１つはマクスウェル方程式で，電荷，電流分布が与えられたときに電磁場を決定する．もう１つは電磁場中での粒子の運動を司る法則であり，これはローレンツ力で与えられる．粒子の電荷を $q$ とすれば，電磁場中で粒子が受ける力は

$$\boldsymbol{F} = q\big(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\big)\,. \tag{A.1}$$

このローレンツ力の法則は次のラグランジアンから導くことができる．

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - q\phi(\boldsymbol{x},t) + q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\,. \tag{A.2}$$

実際に，運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \tag{A.3}$$

を具体的にこのラグランジアンについて求めてみよう．

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -e\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\,\dot{x}_j, \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \tag{A.5}$$

を上に代入して

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = m\ddot{x}_i + q\,\frac{d}{dt}\,A_i + q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\,\dot{x}_j = 0. \tag{A.6}$$

ここで注意すべきは，$A_i$ の時間微分は全微分なので，$\boldsymbol{x}$ が $t$ の関数であるため，それを通じた $t$ 依存性も考慮しなければならないことである．

$$\frac{d}{dt}A_i(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial A_i}{\partial t} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t}. \tag{A.7}$$

したがって

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= -q\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j - q\frac{\partial A_i}{\partial t} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\ &= q\left[\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)\dot{x}_j\right] \\ &= q\big(E_i + \epsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k\big) \end{aligned} \tag{A.8}$$

とローレンツ力の法則が導かれる．

次にハミルトニアンを求めよう．まず正準運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i\ . \tag{A.9}$$

逆に解くと

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m}\big(p_i - qA_i\big)\ . \tag{A.10}$$

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= p_i\dot{x}_i - L \\ &= \big(m\dot{\boldsymbol{x}} + q\boldsymbol{A}\big)\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - \tfrac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 + q\phi - q\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} \\ &= \tfrac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 + q\phi\ , \end{aligned} \tag{A.11}$$

これを $p_i$, $x_i$ で表して

$$H = \frac{1}{2m}\big(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\big)^2 + q\phi\ . \tag{A.12}$$

これが電磁場中の荷電粒子に対するハミルトニアンである．

## A.2 荷電粒子の量子力学

量子力学に移行するには，(A.12) 中の正準運動量 $p_i$ と粒子の座標 $x_i$ との間に正準交換関係

$$\big[p_i, x_j\big] = i\hbar\delta_{ij} \tag{A.13}$$

を設定すればよい．ここで注意すべきは演算子の順序であり，

$$H = \frac{1}{2m}\big(\boldsymbol{p}^2 - q\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} - q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p} + q^2\boldsymbol{A}^2\big) + q\phi \tag{A.14}$$

と解釈しなければエルミートなハミルトニアンが得られない．

$x$ 表示では $p_i$ を $-i\hbar\nabla_i$ に置き換えて，

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{iq\hbar}{2m}(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla) + \frac{q^2}{2m}\boldsymbol{A}^2 + q\phi \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{iq\hbar}{m}\boldsymbol{A}\cdot\nabla + \frac{iq\hbar}{2m}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \frac{q^2}{2m}\boldsymbol{A}^2 + q\phi.
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

波動関数の時間発展は シュレーディンガー方程式

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = H\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{A.16}
$$

で記述される．

## A.3　ゲージ変換

古典電磁気学では運動方程式は電場，磁場によって書かれている．電磁場は四元ポテンシャルに対するゲージ変換

$$
\begin{aligned}
&\phi \to \phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\,, \\
&\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} - \mathrm{grad}\,\Lambda
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

のもとで不変なので，運動方程式も不変である．一方，ラグランジアン (A.2) はゲージ変換によって

$$
L \to L - q\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \nabla\Lambda\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\right) \tag{A.18}
$$

と変化する．ここで $\Lambda(\boldsymbol{x},t)$ は $\Lambda(\boldsymbol{x}(t),t)$ の意味であるから，上の第 2 項は全微分の形にまとまって，

$$
L \to L - q\frac{d\Lambda}{dt} \tag{A.19}
$$

となる．したがって作用は

$$
S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \to S - q\Big[\Lambda(\boldsymbol{x}(t_1),t_1) - \Lambda(\boldsymbol{x}(t_0),t_0)\Big] \tag{A.20}
$$

と変化する．しかしこの変化分は両端点での $\Lambda$ の値だけによっているので，作用原理によって運動方程式を導く際には関係ない．

一方量子力学では，ハミルトニアンがゲージ変換で形を変えてしまい問題である．実は，電磁場をゲージ変換するのと同時に，波動関数の位相を時空の各点ごとに変化させてやる必要があることがわかる．

$$
\psi(\boldsymbol{x},t) \to e^{-iq\Lambda(\boldsymbol{x},t)/\hbar}\psi(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{A.21}
$$

変換 (A.17), (A.21) のもとで，シュレーディンガー方程式は形を変えない．これはシュレーディンガー方程式を次の形に書いてやるとわかりやすい．

$$
\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi = \frac{1}{2m}\big(-i\hbar\nabla - q\boldsymbol{A}\big)^2\psi\,. \tag{A.22}
$$

まず右辺はゲージ変換のもとで

$$\begin{aligned}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi\right)\psi &\to \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi \\ &= e^{-iq\Lambda/\hbar}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi+q\frac{\partial\Lambda}{\partial t}e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi \\ &\quad -q\phi e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi-q\frac{\partial\Lambda}{\partial t}e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi \\ &= e^{-iq\Lambda/\hbar}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi\right)\psi\,,\end{aligned} \tag{A.23}$$

そして左辺は，まず

$$\begin{aligned}(-i\hbar\nabla-q\boldsymbol{A})\psi &\to \big(-i\hbar\nabla-q\boldsymbol{A}+q(\nabla\Lambda)\big)e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi \\ &= e^{-iq\Lambda/\hbar}(-i\hbar\nabla)\psi-q(\nabla\Lambda)e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi \\ &\quad -q\boldsymbol{A}e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi+q(\nabla\Lambda)e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi \\ &= e^{-iq\Lambda/\hbar}(-i\hbar\nabla-q\boldsymbol{A})\psi\end{aligned} \tag{A.24}$$

に注意して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\big(-i\hbar\nabla-q\boldsymbol{A}\big)^2\psi &\to \frac{1}{2m}\big(-i\hbar\nabla-q\boldsymbol{A}+q\nabla\Lambda\big)^2e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi \\ &= \frac{1}{2m}\big(-i\hbar\nabla-q\boldsymbol{A}+q\nabla\Lambda\big)\cdot e^{-iq\Lambda/\hbar}(-i\hbar\nabla-q\boldsymbol{A})\psi \\ &= e^{-iq\Lambda/\hbar}\frac{1}{2m}\big(-i\hbar\nabla-q\boldsymbol{A}\big)^2\psi\,.\end{aligned} \tag{A.25}$$

このように，シュレーディンガー方程式には全体に位相因子 $\exp(-ie\Lambda/\hbar)$ がかかるのみなので，この因子を約せばもとと同じ方程式が得られる．

## A.4 荷電粒子の相対論的力学

古典電磁気学が特殊相対論を内包していたことはよく知られている．ラグランジアン (A.2) から，作用

$$S=\int L\,dt \tag{A.26}$$

を求めると，

$$\begin{aligned}S &= \tfrac{1}{2}m\int\dot{\boldsymbol{x}}^2\,dt-q\int\left[\phi(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right]dt \\ &= \tfrac{1}{2}m\int\dot{\boldsymbol{x}}^2\,dt-q\int\Big[\phi(\boldsymbol{x},t)\,dt-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\cdot d\boldsymbol{x}\Big] \\ &= \tfrac{1}{2}m\int\dot{\boldsymbol{x}}^2\,dt-q\int A_\mu(\boldsymbol{x},t)\,dx^\mu.\end{aligned} \tag{A.27}$$

この第 2 項の積分は粒子の（仮想的）運動経路に沿った線積分である．これを

見ると，第 1 項の運動エネルギーは非相対論的な形であるが，第 2 項の電磁場と荷電粒子の相互作用を表す項は，相対論的不変性を示唆している．

実際，作用積分は運動経路のみによる量なので，時空の座標系をどのようにとるかにはよらないはずである．従って，相対性原理をみたす理論に対しては作用積分はローレンツ不変でなければならない．一方，ラグランジアンは時間軸をどのように取るかに依存するのでローレンツ不変量ではない．

完全に相対論的な方程式を得るには，作用積分の第 1 項をローレンツ不変なものにすればよいであろう．粒子の運動経路から導かれる不変な量としては，経路の 4 次元的長さ，すなわち始点・終点間に経過する固有時間が考えられる．そこで

$$S = -mc^2 \int d\tau - q \int A_\mu(\boldsymbol{x}, t)\, dx^\mu \tag{A.28}$$

としてみる．作用はエネルギー×時間の次元を持つので，$mc^2$ によってエネルギーの次元を与えている．これから運動方程式を導くには，まず，固有時間から座標時間への書き換えを行う．微小の固有時間が

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2}(d\boldsymbol{x})^2 \tag{A.29}$$

で与えられることを用いて，固有時間から座標時間に変数変換

$$d\tau = \sqrt{(dt)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\,dt\right)^2} = dt\sqrt{1 - \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{c^2}} \tag{A.30}$$

することによりラグランジアン

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2} - q\phi(\boldsymbol{x}, t) + q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\dot{\boldsymbol{x}} \tag{A.31}$$

を得る．非相対論的な場合との違いは正準運動量が

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}} + qA_i \tag{A.32}$$

となることである．この第 1 項は，相対論的な運動学的運動量（正準運動量と区別するため運動学的と呼ぶ）

$$\boldsymbol{p}_K = \frac{m\dot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}} \tag{A.33}$$

である．非相対論的な運動量と比較すると，ローレンツ因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}} \tag{A.34}$$

分だけ大きくなっている．これを用いて運動方程式を導出すると，

$$\frac{d\boldsymbol{p}_K}{dt} = q(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B}) \tag{A.35}$$

となり，非相対論的な場合との違いは，単に運動量 $m\dot{\boldsymbol{x}}$ が相対論的な運動量 (A.33) に置き換わっていることである．

# 付録 B
# 相対論

本書で相対論といえば特殊相対性理論を指すが，特殊相対性理論と量子力学は現代物理学の基礎である．相対論の記法には何種類かあるが，本書で用いるビョルケン・ドレル計量を含め，記法をはっきりさせるのを兼ねて，必要な概念をまとめる．

## B.1　特殊相対性理論

特殊相対性理論は，きわめて簡明な理論的構造を持っており，2 つの前提から組み立てられている．その 2 つとは，相対性原理と光速度一定の原理である．

相対性原理は，特殊相対性理論だけでなく，ニュートンの古典力学にも共有される概念であるが，あらゆる座標系（慣性系，以後座標系と言うときは断らない限り慣性系を指す）において，物理法則が同じ形をとるという言明である．慣性系とは，慣性の法則が成り立つ座標系，すなわち，力の働いていない物体（「自由粒子」）が，静止または等速度運動するような座標系である．慣性系は，存在するとすれば無数に存在する．なぜならば，1 つの慣性系から出発して，他の慣性系を得る方法が無数にあるからである．その 1 つは，空間座標の原点を別の任意の点に選ぶ，あるいは時間の原点を別の任意の時刻に選ぶことである．原点をどのように選んでも，自由粒子が一定速度で運動していることは変わらないので，新しい座標系も慣性系である．空間 3 次元と時間 1 次元の原点を選ぶ方法は，新しい座標系の原点がもとの座標系でどの位置かを示す 4 つの実数分だけある．これを 4 つの自由度があるという．

また，空間座標の 3 つの軸を，もとと異なる方向にとることにより新しい座標系が得られる．その自由度を数えるには，新しい $x$ 軸をどの向きに選ぶかという方向に 2 つの自由度（例えば緯度と経度と考えてもよい）があり，新しい $y$ 軸は $x$ 軸と垂直でなければならないので，その選び方は 1 つの自由度しかな

く，$z$ 軸は $x, y$ が決まると自動的に定まる*1)ので，結局 3 つの自由度がある．これは空間回転の自由度ということができる．

さらに，もとの座標系に対し，一定速度で運動している座標系も慣性系となる．

これら 10 の自由度を持つあらゆる慣性系が，どれも平等であって，絶対的特権的な座標系が存在しないというのが相対性原理である．これを認めると，物理法則はどの慣性系でも同じ形に書けるはずであり，特定の座標系において特に簡単になるなどということはない．

上で述べたように，相対性原理はニュートン力学でも特殊相対性理論でも成り立っているが，この 2 つの違いの起源となるのが後者の光速度一定の原理である．これは，どの慣性系においても，光の速度が（光源の運動状態に関係なく）ある普遍的な値 $c$ をもつという内容である．これら 2 つの原理から出発すると，空間と時間それぞれの絶対性は意味を持たず，異なる座標系では空間と時間が混ざるという，特殊相対性理論に特有の結論が得られるのである．例えば，もとの座標系 $(\boldsymbol{x}, t)$ と，それに対し $x$ 方向に速度 $v$ で運動している座標系 $(\boldsymbol{x}', t')$ との関係は，（お互いの原点が一致しているとして）有名な特殊ローレンツ変換の式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{B.1}$$

で関係づけられる．

## B.2 4 次元ベクトルとローレンツ変換

このように，時間と空間は不可分であるので，まとめて 4 成分をもつベクトルとして記すのが便利である．次元をそろえるため，光速を用いて

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{B.2}$$

と書く．添字 $\mu$ は (0, 1, 2, 3) を動き，上付きとして書くことにする．

2 つの慣性系 $x = (\boldsymbol{x}, t)$, $x' = (\boldsymbol{x}', t')$ の間は一般的にどのような関係によって結ばれているだろうか．等速度運動は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}t + \boldsymbol{x}_0$ と表せるが，これは 4 次元時空中の直線の式である．これをもう 1 つの座標系で表したときにも，直線でなければならない．したがって，求める関係は（任意の）直線を直線に写す写像である．このような写像は線形でなければならないので，一般に

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \tag{B.3}$$

と書ける．第 2 項の $b^\mu$ は原点をずらす（並進）ことに対応している．

以後 $b^\mu = 0$ の場合，すなわち，時刻 $t = t' = 0$ で空間の原点が一致してい

---

*1） $z$ 軸の向きの取り方には 2 通りあり，それぞれ右手系，左手系の座標系を与える．

る場合を考える．時刻 $t=0$ で $\boldsymbol{x}=0$ において全方向に光が発生したとすると，後の時刻では，光は $|\boldsymbol{x}|=ct$，すなわち $c^2t^2-\boldsymbol{x}^2=0$ をみたす場所にある．これをもう 1 つの座標系で表すと，光速度一定の原理からやはり $c^2t'^2-\boldsymbol{x}'^2=0$ をみたすはずである．このためには，関係

$$c^2t'^2-\boldsymbol{x}'^2=a\bigl(c^2t^2-\boldsymbol{x}^2\bigr) \tag{B.4}$$

が成り立っている必要があるが，さらに，2 つの座標系のうちどちらがもとの座標系でどちらが新しい座標系という区別はないので，(B.4) で $x^\mu$ と $x'^\mu$ を入れ換えた関係式も成り立つはずである．これから $a=1$ が導かれるので，

$$c^2t'^2-\boldsymbol{x}'^2=c^2t^2-\boldsymbol{x}^2. \tag{B.5}$$

これをみたす 1 次変換が光速度一定の原理と矛盾しない変換である．$b^\mu\neq 0$ の場合は，座標そのものでなく，2 カ所の座標の差 $\Delta x=x_1-x_2$ に対して同様の式が成り立つ．

この条件を $x^\mu$ に対する式として表すために，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いる．計量テンソルは 2 階のテンソルで，その 16 個の成分は

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix} \tag{B.6}$$

とする（空白は 0）．これを用いると，

$$\begin{aligned}x^2\equiv g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu&=(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^2)^2\\&=c^2t^2-\boldsymbol{x}^2\end{aligned} \tag{B.7}$$

と書ける．1 つの項に同じ添字が 2 つ現れた場合は和をとるという約束とする．また，和をとるためには，添字は必ず片方が上付き，もう一方が下付きとする．

計量テンソルを用いて (B.5) を書き直すと

$$g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu=g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \tag{B.8}$$

となる．これに関係 $x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\rho x^\rho$ を代入して

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma=g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \tag{B.9}$$

を得る．これが任意の $x^\mu$ に対し成立するための条件は

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma=g_{\rho\sigma} \tag{B.10}$$

となる．これが慣性系の間の変換係数 $\Lambda^\mu{}_\nu$ のみたすべき関係である．これをみたす $\Lambda$ を用いてある慣性系から別の慣性系に移ることをローレンツ変換と呼ぶ．

## B.3　4 次元ベクトルと内積

一般の 4 次元ベクトル $V^\mu$ とは，ローレンツ変換のもとで

$$V^\mu \longrightarrow V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \tag{B.11}$$

と変換する量のことである．よく現れる 4 次元ベクトルとしては，エネルギー運動量ベクトル

$$p^\mu = (E/c, \boldsymbol{p}) \tag{B.12}$$

などがある．

一般のテンソルは，任意個の添字を持ち，さらにローレンツ変換で

$$T^{\mu\nu\cdots\tau} \to \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \cdots \Lambda^\tau{}_\upsilon T^{\rho\sigma\cdots\upsilon} \tag{B.13}$$

と変換する量である．

4 次元ベクトル $V^\mu$ の添字と計量テンソルの片方の添字とを縮約すると，

$$g_{\mu\nu} V^\nu \tag{B.14}$$

となり，生きた添字が 1 つ下付きに残っている．これを $V_\mu$ という表記で表す．つまり，計量テンソルにより $V^\mu$ の添字を下におろすことができる．$V_\mu$ の具体的な成分は

$$V_\mu = (V^0, -\boldsymbol{V}) \tag{B.15}$$

となることがただちにわかる．すなわち，時間成分は $V^\mu$ と同じで，空間成分は逆符号となる．これと $V^\mu$ を区別するため，$V^\mu$ を反変ベクトル，$V_\mu$ を共変ベクトルと呼ぶ．

逆に共変ベクトルから反変ベクトルを導くには，上付きの計量テンソル

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{B.16}$$

を用いるとよい．

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu . \tag{B.17}$$

これらの計量テンソルを使えば，ベクトルやテンソルの添字を上げたり下げたりすることができる．例えば，テンソル $T_{\mu\nu}$ の最初の添字を上げるには

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} \tag{B.18}$$

とすればよい．計量テンソル自身の片方の添字を上げると

$$g^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{B.19}$$

となるが，これは $\delta^{\mu}_{\nu}$ に等しく，この関係は，計量テンソルを行列とみなすと，$g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ はお互いに逆行列になっていることを意味する．

共変ベクトルのローレンツ変換は，

$$\begin{aligned} V_{\mu} \longrightarrow V'_{\mu} &= g_{\mu\nu} V'^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\rho} V^{\rho} \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\rho} g^{\rho\sigma} V_{\sigma} \end{aligned} \tag{B.20}$$

であるが，$g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\rho} g^{\rho\sigma} = \Lambda_{\mu}{}^{\sigma}$ と書けば，

$$V_{\mu} \longrightarrow \Lambda_{\mu}{}^{\nu} V_{\nu} \tag{B.21}$$

と，反変ベクトルの変換と類似の形に書ける．

1 つ注意しておくと，変換係数 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ はテンソルのような見かけをしているが，テンソルではない．これは，添字の片方は 1 つの座標系，もう片方は別の座標系に属していることを認識すれば理解できるであろう．

一方，計量テンソルは今まで定数と見なしてきたが，テンソルとして変換するとすれば，その変換は

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow g'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} g^{\rho\sigma} \tag{B.22}$$

となるはずである．ところが，変換係数のみたす関係式 (B.10) を用いると，これは $g^{\mu\nu}$ に等しい．すなわち，計量テンソルは，どの慣性系においても同じ値を持つ．このようなテンソルを不変テンソルと呼ぶ．もう 1 つ重要な不変テンソルとして，完全反対称テンソル $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ がある．本書では $\epsilon_{0123} = +1$ と約束する．(従って $\epsilon^{0123} = -1$ である.)

2 つの 4 次元ベクトル $U^{\mu}$, $V^{\mu}$ から，量

$$U^{\mu} V_{\mu} = g_{\mu\nu} U^{\mu} V^{\nu} \tag{B.23}$$

をつくる．これを $U$ と $V$ の内積と呼び，$U \cdot V$ とも書く．この量がローレンツ変換でどのように変換するかを見ると，

$$\begin{aligned} U \cdot V \longrightarrow U' \cdot V' &= g_{\mu\nu} U'^{\mu} V'^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} U^{\rho} V^{\sigma} \\ &= g_{\rho\sigma} U^{\rho} V^{\sigma} \\ &= U \cdot V \end{aligned} \tag{B.24}$$

となる．$\Lambda$ を消す際に関係 (B.10) を用いた．このように，内積はローレンツ変換で不変な量であり，相対論的な理論を構成する際に重要な役割を果たす．

うっかりすると間違えやすいが，時空座標 $x^\mu$ が反変ベクトルなのに対し，それによる微分は共変ベクトル

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

である．これは，

$$\partial_\mu x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu \tag{B.25}$$

であることから理解できるであろう．したがって，微分の反変ベクトルは

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu}\partial_\nu$$

より具体的には

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$$

である．

連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \boldsymbol{j} = 0 \tag{B.26}$$

は，カレント 4 次元ベクトルを

$$j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j}) \tag{B.27}$$

と定義して，

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{B.28}$$

と書けるので，相対論的に共変な形となっている．

## B.4 逆変換

ローレンツ変換 $x'^\rho = \Lambda^\rho{}_\mu x^\mu$ の逆変換

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho x'^\rho \tag{B.29}$$

を考える．（ここでは，見やすくするため，元の座標系の添字を $\mu, \nu, \lambda$, プライム系の添字を $\rho, \sigma, \tau$ とする．）変換と逆変換を続けて行うと元の座標系に戻るので，

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho x'^\rho = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu x^\nu \tag{B.30}$$

より，

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{B.31}$$

が成り立つ．

一方，$\Lambda^{\rho}{}_{\mu}$ が 4 次元内積を不変にすることから，(B.10) つまり

$$g_{\sigma\rho}\Lambda^{\sigma}{}_{\mu}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{B.32}$$

が成り立っている．この式は $g_{\sigma\rho}$ で添字 $\sigma$ をおろして

$$\Lambda_{\rho\mu}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{B.33}$$

と書き直せるが，さらに添字 $\mu$ を上げて

$$\Lambda_{\rho}{}^{\mu}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} \tag{B.34}$$

となる．この式と (B.31) を比較すると，

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\rho} = \Lambda_{\rho}{}^{\mu} \tag{B.35}$$

と結論される．

# 付録 C
# 球面調和関数

球面調和関数は，量子力学をはじめ，物理のさまざまな分野で用いられる．ここでは，第 2 章で用いる事項を中心として，球面調和関数について簡単にまとめる．

## C.1 球面調和関数

球面調和関数は，2 次元球面上のラプラシアンの固有関数である．

一般に調和関数とは，

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{C.1}$$

をみたす関数をいうが，球面調和関数 $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ は，$r^\ell Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ が調和関数となるような関数である．

極座標を用いてラプラシアンを表すと，

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\boldsymbol{L}^2 , \tag{C.2}$$

$$\boldsymbol{L}^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \tag{C.3}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\nabla^2 r^\ell Y_{\ell m}(\theta,\varphi) &= \ell(\ell-1)r^{\ell-2}Y_{\ell m} + 2\ell r^{\ell-2}Y_{\ell m} - r^{\ell-2}\boldsymbol{L}^2 Y_{\ell m} \\ &= \big(\ell(\ell+1) - \boldsymbol{L}^2\big)r^{\ell-2}Y_{\ell m} \\ &= 0 ,\end{aligned} \tag{C.4}$$

すなわち

$$\boldsymbol{L}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell m} \tag{C.5}$$

が成り立つ．

$r^\ell Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ は，$x$, $y$, $z$ の関数としてみたとき $\ell$ 次の同次多項式であることが知られている．$\ell$ 次同次多項式は，$x^i y^j z^k$ $(i+j+k=\ell)$ という形の項の和からなるので，一般に ${}_\ell\mathrm{H}_3 = \frac{1}{2}(\ell+1)(\ell+2)$ 個の項からなる．これに $\nabla^2$ を作用させると $(\ell-2)$ 次同次多項式になるので，これが 0 になるためには，係数の間に $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ 個の条件が成り立つ必要があり，差し引き

$$\frac{1}{2}(\ell+1)(\ell+2) - \frac{1}{2}\ell(\ell-1) = 2\ell+1 \tag{C.6}$$

個の自由度がある．$m$ はこの自由度に対応しており，$m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell$ の値をとる．具体的には，

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{C.7}$$

として，

$$L_z Y_{\ell m} = m Y_{\ell m} \tag{C.8}$$

をみたす．この 2 つの関係 (C.5), (C.8) によって，球面調和関数 $Y_{\ell m}$ は定数倍を除いて定まる．

量子力学では，ハミルトニアンが回転不変であれば，角運動量演算子はハミルトニアンと可換であり，エネルギー固有関数は同時に角運動量演算子の固有関数となる．(上に記した $\boldsymbol{L}^2$, $L_z$ は，$\hbar$ を単位として測った角運動量に対応しており，この章では $\hbar = 1$ とする．) 角運動量演算子同士は，交換関係式 $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$ をみたしてお互いに可換でないが，$[\boldsymbol{L}^2, L_i] = 0$ が成り立つので，通常，同時対角化可能な演算子の組として $(H, \boldsymbol{L}^2, L_z)$ を採用する．このとき，時間によらないシュレーディンガー方程式の解は，動径波動関数と球面調和関数の積として書ける．

球面調和関数の規格化は，ノルムが 1 になるように決める．また一般に，エルミート演算子の異なる固有値に対応する固有関数は直交するので，$Y_{\ell m}$ は，関係

$$\int d\Omega\, Y^*_{\ell m} Y_{\ell' m'} = \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi) Y_{\ell' m'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{C.9}$$

をみたす．

$L_\pm = L_x \pm iL_y$ と定義すると，角運動量演算子同士の交換関係式から

$$[L_z, L_\pm] = \pm L_\pm \tag{C.10}$$

が成り立つので，$L_\pm Y_{\ell m}$ は

$$\boldsymbol{L}^2\big(L_\pm Y_{\ell m}\big) = \ell(\ell+1)\big(L_\pm Y_{\ell m}\big), \tag{C.11a}$$

$$L_z\big(L_\pm Y_{\ell m}\big) = (m\pm 1)\big(L_\pm Y_{\ell m}\big) \tag{C.11b}$$

をみたすことが言える．このことから，

$$L_\pm Y_{\ell m} = c_\pm Y_{\ell, m\pm 1} \tag{C.12}$$

が成り立たなければならない．この両辺のノルムを取り，関係

$$L_\pm L_\mp = \boldsymbol{L}^2 - L_z^2 \pm L_z \tag{C.13}$$

を用いると，

$$|c_\pm|^2 = (\ell \mp m)(\ell \pm m + 1) \tag{C.14}$$

であることがわかる．そこで，$Y_{\ell m}$ の相対位相を

$$L_\pm Y_{\ell m} = \sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)}\, Y_{\ell, m\pm 1} \tag{C.15}$$

が成り立つように選ぶ．

性質 (C.8) より，$Y_{\ell m}$ の $\varphi$ 依存性は $e^{im\varphi}$ であることがわかるが，さらに $L_\pm$ の極座標での表示

$$L_\pm = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{C.16}$$

を用いて，関係 (C.15) の特別な場合 $L_- Y_{\ell,-\ell} = 0$ より，$Y_{\ell,-\ell}$ に対する 1 階の微分方程式が得られ，解は $Y_{\ell,-\ell} \propto \sin^\ell\theta\, e^{-i\ell\varphi}$ となる．これに $L_+$ を順次作用させていくと一般の $Y_{\ell m}$ が求められる．(逆に $L_+ Y_{\ell\ell} = 0$ から出発して $L_-$ を作用させてもよい．)

これを見やすくするため，$Y_{\ell m}$ の $\varphi$ 依存性が $e^{im\varphi}$ であることを用いると，$L_+$ の作用は $e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - m\cot\theta\right)$ と書ける．これはさらに，$e^{i\varphi}\sin^m\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^{-m}\theta$ と書き直すことができる．この表式を用いて，$Y_{\ell,-\ell}$ に $L_+$ を $(\ell+m)$ 回作用させると，

$$\begin{aligned} Y_{\ell m} &\propto {L_+}^{\ell+m}\sin^\ell\theta\, e^{-i\ell\varphi} \\ &\propto \sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\, e^{im\varphi} \end{aligned} \tag{C.17}$$

となる．これを $w = \cos\theta$ を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} Y_{\ell m} &\propto (1-w^2)^{m/2}\left(-\frac{\partial}{\partial w}\right)^{\ell+m}(1-w^2)^\ell\, e^{im\varphi} \\ &= (-1)^m(1-w^2)^{m/2}\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^{\ell+m}(w^2-1)^\ell\, e^{im\varphi} \end{aligned} \tag{C.18}$$

と書ける．このように，角運動量演算子を用いて球面調和関数を構成することができる．

球面調和関数の通常用いられる形を挙げると，

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = N_{\ell m} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\varphi}\ , \tag{C.19}$$

$m = 0$ に対しては

$$P_\ell^0(w) = P_\ell(w) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dw^\ell}(w^2 - 1)^\ell \tag{C.20}$$

はルジャンドルの多項式（$P_\ell(1) = 1$ と規格化されている）で，$m > 0$ に対しては

$$P_\ell^m(w) = (1 - w^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(w)}{dw^m} \tag{C.21}$$

はルジャンドルの陪関数である．これを

$$P_\ell^m(w) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1 - w^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dw^{\ell+m}}(w^2 - 1)^\ell \tag{C.22}$$

と書き直しておくと $m < 0$ でも成り立つ．また規格化定数は

$$N_{\ell m} = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell + 1)}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} \tag{C.23}$$

である．この符号因子は，上で述べたように $L_\pm$ の行列要素が正になるように選んである．

$Y_{\ell,\pm m}$ の間には

$$Y_{\ell m}^* = (-1)^m Y_{\ell,-m} \tag{C.24}$$

の関係がある．したがって，$m < 0$ に対し，$Y_{\ell m}$ を

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = N_{\ell m} P_\ell^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}\ , \tag{C.25}$$

$$N_{\ell m} = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)}{4\pi} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!}} \tag{C.26}$$

で定義してもよい．

$\ell = 0,\ 1,\ 2$ に対する球面調和関数の具体的な形は，

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \tag{C.27a}$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x \pm iy}{r}, \tag{C.27b}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \cos\theta = \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \frac{z}{r}, \tag{C.27c}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{x^2 - y^2 \pm 2ixy}{r^2}, \tag{C.27d}$$

$$Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\varphi} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{xz \pm iyz}{r^2}, \tag{C.27e}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} \tag{C.27f}$$

である．

本文中の式を示そうとすると必要になるかもしれないルジャンドル陪関数に関する漸化式をいくつか挙げておく．

$$wP_\ell^m(w) = \frac{1}{2\ell+1}\big[(\ell-m+1)\,P_{\ell+1}^m + (\ell+m)\,P_{\ell-1}^m\big], \tag{C.28}$$

$$\sqrt{1-w^2}P_\ell^m = \frac{1}{2\ell+1}\big(P_{\ell+1}^{m+1} - P_{\ell-1}^{m+1}\big), \tag{C.29}$$

$$\sqrt{1-w^2}P_\ell^m = -(\ell-m+1)wP_\ell^{m-1} + (\ell+m-1)P_{\ell-1}^{m-1}. \tag{C.30}$$

(C.28) と (C.30) を組み合わせて以下が得られる．

$$\begin{aligned}\sqrt{1-w^2}P_\ell^m = \frac{1}{2\ell+1}\big[&-(\ell-m+1)(\ell-m+2)P_{\ell+1}^{m-1} \\ &+ (\ell+m)(\ell+m-1)P_{\ell-1}^{m-1}\big].\end{aligned} \tag{C.31}$$

また，回転行列（ウィグナーの $D$ 関数）の加法定理より次の関係が得られる．

$$\begin{aligned}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)Y_{\ell' m'}(\theta,\varphi) = \sum_{\ell''}&\sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi(2\ell''+1)}}(\ell\ell' mm'|\ell'' m{+}m') \\ &\times (\ell\ell' 00|\ell'' 0)\,Y_{\ell'',m+m'}(\theta,\varphi)\,.\end{aligned} \tag{C.32}$$

# 付録 D
# ガンマ行列

ここでは，ガンマ行列が本質的に 1 種類しかないことを証明し，さらにガンマ行列のさまざまな有用な性質を導く．

## D.1　ガンマ行列の等価性

ここでは，性質

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = g^{\mu\nu} \ , \tag{3.16a}$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \ , \qquad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \tag{3.16b}$$

をみたす 4 つの行列の組 $\{\gamma^\mu\}$ がすべてユニタリ同値であることを示す．

4 つの $\gamma^\mu$ から，それらの積によって 16 個の一次独立な行列 $\Gamma^A$ が構成できることは 3.6 節で示した．これらの行列 2 つの積は，やはり 16 個のうちの 1 つ（$\pm 1$ または $\pm i$ 倍を除いて）になっている．

$$\Gamma^A\Gamma^B = \eta_{AB}\Gamma^C \qquad ({\eta_{AB}}^4 = 1). \tag{D.1}$$

この式に左から $\Gamma^A$ の逆行列 $\Gamma_A$ をかけると

$$\Gamma^B = \eta_{AB}\Gamma_A\Gamma^C \tag{D.2}$$

となる．このことは，$\Gamma^A$ と $\Gamma^C$ を与えたとき，(D.1) をみたすような $\Gamma^B$ は 1 つしかないことを意味する．これより，16 個の $\{\Gamma^A\}$ に，ある $\Gamma^X$ をかけてできる 16 個の行列は全て異なり，$\{\Gamma^X\Gamma^A\}$ は組として $\{\Gamma^A\}$ と（$\eta$ 倍を無視すると）同一であることが結論される．

ところで，ある 4 次行列 $M$ が 4 つの $\gamma^\mu$ のいずれとも可換であったとすると，$\Gamma^A$ は $\gamma^\mu$ の積からなるであることから，明らかに 16 個の $\Gamma^A$ すべてと可換になる．3.6 節で，任意の 4 次行列が 16 個の $\Gamma^A$ により展開できることを示したので，これは $M$ があらゆる 4 次行列と可換であることを意味する．

シューアの補題により，このような行列は単位行列の定数倍でなければならない．（より具体的には，3.6 節で見たように，16 個の $\Gamma^A$ のうち 1 以外の 15 個に対し，それと反可換な $\Gamma^B$ が必ず存在することからこのことがわかる．）

さて，(3.16) をみたすガンマ行列の組 2 つ $\{\gamma^\mu\}$, $\{\gamma'^\mu\}$ があったとして，それぞれから $\{\Gamma^A\}$, $\{\Gamma'^A\}$ を構成すると，上記の性質は両方に対して成り立つ．そこで，任意の行列 $K$ に対し，行列 $M$ を

$$M = \sum_{A=1}^{16} \Gamma'^A K \Gamma_A \tag{D.3}$$

と定義する．この $M$ は性質

$$\Gamma'^X M \Gamma_X = M \tag{D.4}$$

をみたしていることが示せる．実際，

$$\Gamma_A \Gamma_X = (\Gamma^A)^{-1}(\Gamma^X)^{-1} = (\Gamma^X \Gamma^A)^{-1} \tag{D.5}$$

に注意して，

$$\begin{aligned}\Gamma'^X M \Gamma_X &= \sum_A \Gamma'^X \Gamma'^A K \Gamma_A \Gamma_X \\ &= \sum_B \eta_{XA} \Gamma'^B K (\eta_{XA})^{-1} \Gamma_B \\ &= \sum_B \Gamma'^B K \Gamma_B \\ &= M\end{aligned} \tag{D.6}$$

である．これに右から $\Gamma^X$ をかけると，

$$\Gamma'^X M = M \Gamma^X \tag{D.7}$$

が成り立つ．この $M$ が変換行列の候補となる．

ここでまず，$M = 0$ であったら話にならないので，適当な $K$ に対して $M \neq 0$ であることを示す．もしそうでなければ，あらゆる $K$ に対して $M = 0$ となるので，$K$ として行列単位 $I^{(\xi\eta)}$（16 個の成分のうち $\xi$ 行 $\eta$ 列のみが 1 で残りが 0 であるような行列）をとってやると，行列成分を書いて

$$M_{\alpha\beta} = \sum_A (\Gamma'^A)_{\alpha\gamma} \left(I^{(\xi\eta)}\right)_{\gamma\delta} (\Gamma_A)_{\delta\beta} = \sum_A (\Gamma'^A)_{\alpha\xi} (\Gamma_A)_{\eta\beta} = 0 \tag{D.8}$$

が成り立ち，これは行列の関係として

$$\sum_A (\Gamma'^A)_{\alpha\xi} \Gamma_A = 0 \tag{D.9}$$

と書ける．この式は $\Gamma_A$ が独立でないことを意味するので正しくない．したがって前提が誤っており，$M \neq 0$ であるような行列 $K$ が存在する．

次に，$M$ が逆行列を持つような $K$ が存在することを示す．いままでの議

論は，$\{\Gamma^A\}$ と $\{\Gamma'^A\}$ を入れ替えても同様に成立するので，任意の行列 $\widetilde{K}$ に対し，

$$\widetilde{M} = \sum_{A=1}^{16} \Gamma^A \widetilde{K} \Gamma'_A \tag{D.10}$$

で定義した行列 $\widetilde{M}$ は，(D.7) に対応する性質

$$\Gamma^X \widetilde{M} = \widetilde{M} \Gamma'^X \tag{D.11}$$

をみたす．(D.7) と (D.11) を用いて

$$\Gamma^X \widetilde{M} M = \widetilde{M} \Gamma'^X M = \widetilde{M} M \Gamma^X \tag{D.12}$$

となるが，この関係はどの $\Gamma^X$ についても成り立つので，$\widetilde{M}M$ は単位行列の定数倍でなければならない．

$$\widetilde{M} M = \kappa. \tag{D.13}$$

行列 $\widetilde{K}$ を適当に選ぶと $\widetilde{M} \neq 0$ とできることは上の議論で言えているが，さらに $\kappa \neq 0$ となるような $K$ が存在することを同種の議論によって示すことができる．($\widetilde{M}M = \sum_A (\widetilde{M}\Gamma'^A) K \Gamma_A$ に対して $K$ を行列単位にとって調べる．)

したがって，式 (D.13) は $M$ が逆行列 $\kappa^{-1}\widetilde{M}$ を持つことを示している．すなわち

$$\Gamma'^X = M \Gamma^X M^{-1}\,, \tag{D.14}$$

特に

$$\gamma'^\mu = M \gamma^\mu M^{-1} \tag{D.15}$$

が成り立ち，2 組のガンマ行列は同値である．

最後に，$M$ をユニタリ行列に選べることを示す．(D.15) のエルミート共役を取ると

$$\gamma'^{\mu\dagger} = (M^{-1})^\dagger \gamma^{\mu\dagger} M^\dagger \tag{D.16}$$

となるが，$\gamma^\mu$ はエルミートか反エルミートなので，

$$\gamma'^\mu = (M^{-1})^\dagger \gamma^\mu M^\dagger \tag{D.17}$$

である．(D.15) から

$$\gamma^\mu = M^{-1} \gamma'^\mu M \tag{D.18}$$

なので，

$$\gamma^\mu = M^{-1} (M^{-1})^\dagger \gamma'^\mu M^\dagger M \tag{D.19}$$

すなわち

$$M^\dagger M \gamma^\mu = \gamma^\mu M^\dagger M \tag{D.20}$$

が成り立つ．これは $M^\dagger M$ が単位行列の定数倍である

$$M^\dagger M = \lambda \tag{D.21}$$

ことを意味する．この関係の行列式を取ると，$\lambda$ が正の実数であることがわかるので，$\lambda^{1/2}$ を $M$ に押し込めると $M^\dagger M = 1$ とできる．

E.1 節では，ガンマ行列の積で生成される有限群の表現論を考えることにより，ガンマ行列の等価性を別の形で示す．

## D.2 ガンマ行列の積とトレース

任意個のガンマ行列の積は 16 個の $\Gamma^A$ (3.91) に帰着することは前に見たが，これを共変な形で具体的に実行するための公式を導く．

まず，2 個のガンマ行列の積は，一般に

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) + \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \tag{D.22}$$

と表せる．次に 3 個のガンマ行列であるが，その前にトレースの公式を導いておく．

3.6 節で，16 個の $\Gamma^A$ は 1 を除きトレースが 0 であることを示した．また $\mathrm{tr}\,\Gamma^A \Gamma_B = 4\delta^A_B$ であることも導いた．このことから，奇数個の $\gamma^\mu$ の積のトレースは必ず 0 であることが直ちにわかる．次に，(D.22) 式のトレースを取ると，

$$\mathrm{tr}\,\gamma^\mu \gamma^\nu = 4g^{\mu\nu} \tag{D.23}$$

が導かれる．4 つの $\gamma^\mu$ の積は

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma &= \mathrm{tr}(g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})(g^{\rho\sigma} - i\sigma^{\rho\sigma}) \\ &= g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,1 - \mathrm{tr}\,\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma} \\ &= 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})\end{aligned} \tag{D.24}$$

となる．別の導出としては，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma &= \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma^\rho\gamma^\sigma \\ &= 2g^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}\,\gamma^\rho\gamma^\sigma - \mathrm{tr}\,\gamma^\nu(2g^{\mu\rho} - \gamma^\rho\gamma^\mu)\gamma^\sigma \\ &= 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + \mathrm{tr}\,\gamma^\nu\gamma^\rho(2g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma\gamma^\mu) \\ &= 8(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) - \mathrm{tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\end{aligned} \tag{D.25}$$

より同じ結果が得られる．一般にこれと同じ方法を用いると，トレース内のガンマ行列の数を 2 つ減らすことができる．次に，

$$\mathrm{tr}\,\gamma_5 = 0, \tag{D.26}$$

$$\mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0 \tag{D.27}$$

は直ちにわかり，

$$\mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{D.28}$$

は，4 つのガンマ行列がすべて異なるとき以外は 0 になることに注意し，異なるガンマ行列が反可換であることから，完全反対称テンソルに比例することがわかる．符号は $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ のここで用いている定義が

$$\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = +1 \tag{D.29}$$

であることと $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ から決まる．

ここで，3 つのガンマ行列の積に戻ると，任意の 3 つのガンマ行列の積は $\gamma^\mu$ か $\gamma^\mu\gamma_5$ の形に書き直せるはずなので，一般に

$$\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu = S^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_\rho + E^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_\rho\gamma_5 \tag{D.30}$$

という形をとる．この式中の $S$ と $E$ を決めるには，この式に $\gamma^\sigma$ と $\gamma^\sigma\gamma_5$ をかけてそれぞれトレースを取ればよい．結果は

$$\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\lambda\mu}\gamma^\nu + g^{\mu\nu}\gamma^\lambda - g^{\lambda\nu}\gamma^\mu - i\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_\rho\gamma_5 \tag{D.31}$$

となる．

ついでに，同様に証明できる縮約公式

$$\gamma^\alpha\gamma_\alpha = 4, \tag{D.32}$$

$$\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma_\alpha = -2\gamma^\mu, \tag{D.33}$$

$$\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\alpha = 4g^{\mu\nu}, \tag{D.34}$$

$$\gamma^\alpha\sigma^{\mu\nu}\gamma_\alpha = 0, \tag{D.35}$$

$$\gamma^\alpha\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\alpha = -2\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda \tag{D.36}$$

を挙げておく．

## D.3 フィールツ組み替え

4 つのディラック場からローレンツスカラー量を構成することを考える．4 つを $\bar\psi_1, \psi_2, \bar\psi_3, \psi_4$ と書くと，それには $\bar\psi_1$ と $\psi_2$ を組んでスカラー，ベクトル，またはテンソル量を作り，それと $\bar\psi_3$ と $\psi_4$ で組んだ同種の量を縮約すること

が考えられる．あるいは，$\bar{\psi}_1$ と $\psi_4$，$\bar{\psi}_3$ と $\psi_2$ をそれぞれ組んで縮約することもできる．実は，この 2 つの構成法の間には関係をつけられることが知られている．つまり，第 2 の方法で構成したスカラー量は，第 1 の方法で構成した量によって書き直すことができる．これをフィールツ組み替え（あるいはフィールツ変換）と呼ぶ．

具体的な関係を示す前に，まず一般論をしておく．$n$ 行 $n$ 列の行列全体は，$n^2$ 次元のベクトル空間とみなすことができる．その基底として $n^2$ 個の行列 $E^\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n^2)$ を選ぶと，任意の行列は $\{E^\alpha\}$ の線形結合の形に展開できる．この基底 $\{E^\alpha\}$ の完全性を表現する式が，一般のフィールツ恒等式である．

この $n^2$ 次元のベクトル空間に，自然な内積を定義することができる．行列 $A, B$ に対し，その内積は

$$(A, B) = \mathrm{tr}\, A^\dagger B = \sum_{i,j} A^*_{ij} B_{ij} \tag{D.37}$$

と書ける．基底 $\{E^\alpha\}$ に対し，その双対基底 $\{E_\alpha\}$ を性質

$$\mathrm{tr}\, E^\alpha E_\beta = c\delta^\alpha_\beta \tag{D.38}$$

をみたすものとして定義する．(定数 $c$ は本来 1 だが 1 に規格化しないほうが便利な場合もあるので便宜上入れておく.）もし $\{E^\alpha\}$ が正規直交基底ならば，双対基底は自分自身に等しい．

さて，$\{E^\alpha\}$ は完全系なので，任意の行列 $A$ を

$$A = \sum_\alpha a_\alpha E^\alpha \tag{D.39}$$

と展開できる．この展開係数 $a_\alpha$ を求めるには，この式に $E_\beta$ をかけてトレースを取ると，

$$\mathrm{tr}\, E_\beta A = \sum_\alpha a_\alpha\, \mathrm{tr}\, E_\beta E^\alpha = c\, a_\beta \tag{D.40}$$

となるので，任意の行列 $A$ は

$$A = c^{-1} \sum_\alpha E^\alpha\, \mathrm{tr}\, E_\alpha A \tag{D.41}$$

と表せる．ここで，$A$ として $ij$ 成分だけが 1 で他は 0 であるような行列単位 $I^{(ij)}$ を取ると，$\left(I^{(ij)}\right)_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$ であるから等式の $k\ell$ 成分を書き出して

$$\delta_{ik}\delta_{j\ell} = c^{-1} \sum_\alpha (E^\alpha)_{k\ell} (E_\alpha)_{ji} \tag{D.42}$$

となる．これを書き直して

$$\sum_\alpha (E^\alpha)_{ij} (E_\alpha)_{k\ell} = c\delta_{i\ell}\delta_{kj} \tag{D.43}$$

が得られる．これが一般的なフィールツ恒等式である．

2 行 2 列の場合には，基底として 3 つのパウリ行列と単位行列を選ぶことができる．

$$E^{\alpha}=\{\sigma_i,1\}. \tag{D.44}$$

このとき $E_{\alpha}=E^{\alpha}$, $c=2$ であり，関係

$$\sum_a(\sigma_a)_{ij}(\sigma_a)_{k\ell}+\delta_{ij}\delta_{k\ell}=2\delta_{i\ell}\delta_{kj} \tag{D.45}$$

が得られる．$n$ 行 $n$ 列の場合も，SU($n$) の生成子行列と（適当に規格化した）単位行列を基底として選ぶと同様の関係式を得ることができる．

さて，この結果をガンマ行列に対して適用するには，$\{E^{\alpha}\}=\{\Gamma^A\}$, $\{E_{\alpha}\}=\{\Gamma_A\}$, $c=4$ と選ぶと，ガンマ行列のフィールツ恒等式

$$\begin{aligned}\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}=\frac{1}{4}\Big[&\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}(\gamma_{\mu})_{\gamma\delta}+\tfrac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\delta}\\&-(\gamma^{\mu}\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_{\mu}\gamma_5)_{\gamma\delta}+(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_5)_{\gamma\delta}\Big]\end{aligned} \tag{D.46}$$

が導かれる．この式を元にしてさまざまな関係式が得られる．例えばこれに $(\gamma^{\lambda})_{\alpha'\alpha}(\gamma_{\lambda})_{\beta\beta'}$ をかけて，前節の縮約公式を用いれば，

$$\begin{aligned}(\gamma^{\lambda})_{\alpha\delta}(\gamma_{\lambda})_{\gamma\beta}=&\ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}-\tfrac{1}{2}(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}(\gamma_{\mu})_{\gamma\delta}\\&-\tfrac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_{\mu}\gamma_5)_{\gamma\delta}-(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_5)_{\gamma\delta}\end{aligned} \tag{D.47}$$

また，これらを組み合わせて

$$\big[\gamma^{\mu}(1\pm\gamma_5)\big]_{\alpha\delta}\big[\gamma_{\mu}(1\pm\gamma_5)\big]_{\gamma\beta}=-\big[\gamma^{\mu}(1\pm\gamma_5)\big]_{\alpha\beta}\big[\gamma^{\mu}(1\pm\gamma_5)\big]_{\gamma\delta}, \tag{D.48}$$

$$\big[\gamma_{\mu}(1+\gamma_5)\big]_{\alpha\delta}\big[\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\big]_{\gamma\beta}=2(1-\gamma_5)_{\alpha\beta}(1+\gamma_5)_{\gamma\delta} \tag{D.49}$$

などが得られる．この 2 つが比較的簡単な形をしているのは，実質的に 2 成分の関係式であるためである．

これらに $\bar{\psi}_{1\alpha}\psi_{2\beta}\bar{\psi}_{3\gamma}\psi_{4\delta}$ を乗ずると，冒頭で言及したフィールツ組み替えの関係式を得ることができる．ただし，これらが量子場の場合は，フェルミ統計の反可換性により符号が逆になるので注意が必要である．例えば，

$$\bar{\psi}_1\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\psi_4\,\bar{\psi}_3\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\psi_2=+\bar{\psi}_1\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\psi_2\,\bar{\psi}_3\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\psi_4 \tag{D.50}$$

となる．単なるスピノル $\bar{u}_{\alpha}(\boldsymbol{p})$ 等をかけた場合にはもちろん符号の変化はない．

## D.4 ゴルドン分解

ガンマ行列 2 つの積の公式 (D.22) を $\bar{u}(\boldsymbol{p}')$ と $u(\boldsymbol{p})$ ではさみ，$p_\nu$ と縮約すると

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma^\mu \gamma{\cdot}p\, u(\boldsymbol{p}) = p^\mu \bar{u}(\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}) - ip_\nu \bar{u}(\boldsymbol{p}')\sigma^{\mu\nu}u(\boldsymbol{p}). \tag{D.51}$$

運動方程式 $\gamma{\cdot}p\, u(\boldsymbol{p}) = mc\, u(\boldsymbol{p})$ を用いて，

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{mc}\big[p^\mu \bar{u}(\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}) - ip_\nu \bar{u}(\boldsymbol{p}')\sigma^{\mu\nu}u(\boldsymbol{p})\big] \tag{D.52}$$

が得られる．同様に，(D.22) の $\mu, \nu$ を入れ換えた式

$$\gamma^\nu\gamma^\mu = g^{\mu\nu} + i\sigma^{\mu\nu} \tag{D.53}$$

を $\bar{u}(\boldsymbol{p}')$ と $u(\boldsymbol{p})$ ではさみ，$p'_\nu$ と縮約して運動方程式を使うと

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{mc}\big[p'^\mu \bar{u}(\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}) + ip'_\nu \bar{u}(\boldsymbol{p}')\sigma^{\mu\nu}u(\boldsymbol{p})\big] \tag{D.54}$$

となる．(D.52) と (D.54) の和をとると

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2mc}(p+p')^\mu \bar{u}(\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}) - \frac{i}{2mc}(p-p')_\nu \bar{u}(\boldsymbol{p}')\sigma^{\mu\nu}u(\boldsymbol{p})\,, \tag{D.55}$$

差をとると

$$\frac{1}{2mc}(p-p')^\mu \bar{u}(\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}) = \frac{i}{2mc}(p+p')_\nu \bar{u}(\boldsymbol{p}')\sigma^{\mu\nu}u(\boldsymbol{p})\,, \tag{D.56}$$

同様の方法で

$$\begin{aligned}\bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma^\mu\gamma_5 u(\boldsymbol{p}) = &-\frac{1}{2mc}(p-p')^\mu \bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma_5 u(\boldsymbol{p}) \\ &+ \frac{i}{2mc}(p+p')_\nu \bar{u}(\boldsymbol{p}')\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 u(\boldsymbol{p})\,,\end{aligned} \tag{D.57}$$

$$\frac{1}{2mc}(p+p')^\mu \bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma_5 u(\boldsymbol{p}) = \frac{i}{2mc}(p-p')_\nu \bar{u}(\boldsymbol{p}')\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 u(\boldsymbol{p}) \tag{D.58}$$

等が得られる．これらの等式，なかでも (D.55) を**ゴルドン分解**と呼ぶ．

(D.55) に対応する座標空間での関係式は

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = \frac{i\hbar}{2mc}\bar{\psi}(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\psi(x) + \frac{\hbar}{2mc}\partial_\nu\big(\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)\big) \tag{D.59}$$

となる．ここで $A\overleftrightarrow{\partial^\mu}B = A\partial^\mu B - (\partial^\mu B)A$ と定義する．ただし $\psi(x)$ はディラック方程式 $(i\hbar\gamma{\cdot}\partial - mc)\psi(x) = 0$ の解でなければならない．この右辺の第 1 項は，クライン・ゴルドン方程式に対するカレントと同じ形をしていることからわかるように，スピンに関係しないカレント（このカレントを電磁相互作用のカレントとすると，電荷の流れに対応する部分）であり，第 2 項はスピン

との結合（電磁相互作用の場合は磁気双極子に対応する）を記述すると解釈できる．実際，電磁相互作用のラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{\rm int} = e\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu \tag{D.60}$$

において，$\psi$ が運動方程式の解として (D.59) を適用し，その第 2 項を部分積分すると

$$\frac{e\hbar}{2mc}\partial_\nu\left(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\right)A_\mu = -\frac{e\hbar}{2mc}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\,\partial_\nu A_\mu = \frac{e\hbar}{4mc}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\,F_{\mu\nu} \tag{D.61}$$

となり，$(\mu\nu)$ の空間部分を抜き出すと

$$-\frac{e}{mc}\,\bar{\psi}\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}\psi\cdot\boldsymbol{B} \tag{D.62}$$

という形になる．

## D.5　ガンマ行列のマヨラナ表示

ディラックスピノルの荷電共役は

$$\psi^c = C\gamma^{0T}\gamma^* = A\psi^* \tag{D.63}$$

と書くことができるが，行列 $A = C\gamma^{0T}$ は 4.2 節で見たように性質

$$A\gamma^{\mu *}A^{-1} = -\gamma^\mu \tag{D.64}$$

をみたす．$A$ はユニタリ

$$AA^\dagger = C\gamma^{0T}\gamma^{0*}C^\dagger = C\gamma^{0T}\gamma^{0T}C^{-1} = CC^{-1} = 1 \tag{D.65}$$

かつ対称

$$A = C\gamma^{0T} = C\gamma^{0T}C^{-1}C = -\gamma^0 C = +\gamma^0 C^T = A^T \tag{D.66}$$

である．一般に，ユニタリ対称行列は実直交行列により対角化できる*1) ので，

$$A = ODO^T \tag{D.67}$$

と書け，$D$ は対角で，対角成分はユニタリ行列の固有値なのでそれぞれ絶対値

*1)　ユニタリ行列 $U$ をエルミート部分と反エルミート部分に分けて

$$U = \tfrac{1}{2}(U + U^\dagger) + \tfrac{1}{2}(U - U^\dagger) \equiv H_1 + iH_2\,, \qquad H^\dagger_{1,2} = H_{1,2}$$

とすると，$U^\dagger U = UU^\dagger$ から $[H_1, H_2] = 0$ が導けるので，$H_1$ と $H_2$ は同時対角化可能である．さらに，$U = U^T$ であれば，

$$H_1 = \tfrac{1}{2}(U + U^\dagger) = \tfrac{1}{2}(U + U^*) = \mathrm{Re}\,U,$$
$$H_2 = \tfrac{1}{2i}(U - U^\dagger) = \tfrac{1}{2i}(U - U^*) = \mathrm{Im}\,U$$

となり，$H_{1,2}$ は実対称行列なので，実直交行列によって対角化できる．

1 の複素数である．したがって，行列 $D^{1/2}$（2 乗して $D$ になる行列）が存在し，$V = OD^{1/2}O^T$ とすると，

$$A = V^2 \tag{D.68}$$

かつ $VV^\dagger = 1$,

$$V^T = O(D^{1/2})^T O^T = V \tag{D.69}$$

である．(D.64) 式は $V^2\gamma^{\mu *}V^{-2} = -\gamma^\mu$ となるが，これは

$$V\gamma^{\mu *}V^{-1} = -V^{-1}\gamma^\mu V \tag{D.70}$$

と書ける．いま，

$$\gamma'^\mu = V^{-1}\gamma^\mu V = V^\dagger\gamma^\mu V \tag{D.71}$$

と定義すると，

$$\gamma'^{\mu *} = V^T\gamma^{\mu *}V^* = V\gamma^{\mu *}V^\dagger \tag{D.72}$$

と書けるので，(D.70) 式は

$$\gamma'^{\mu *} = -\gamma'^\mu \tag{D.73}$$

となり，$\gamma'^\mu$ が純虚行列であることが示される．これがマヨラナ表示である*2)．

*2) もちろん，この $\gamma'^\mu$ をさらに任意の実直交行列で同値変換したものも別のマヨラナ表示となる．

# 付録 E
# $D$ 次元時空のガンマ行列とスピノル

弦の理論においては，その整合性により時空の次元が 4 次元より高い次元が要求される．ここでは，一般の時空の次元に対し，ガンマ行列の性質を調べ，どのようなスピノルが存在するかを見る．この過程で，4 次元のガンマ行列の同値性の別証明が得られる．

## E.1　$D$ 次元時空におけるガンマ行列の表現

$D$ 次元時空のガンマ行列も，4 次元時空の場合と同様の関係式

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} \tag{E.1}$$

を用いて定義する．$D$ 次元の計量テンソルは

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{E.2}$$

である．

この節では，以後議論を簡明にするため，空間成分のガンマ行列 $\gamma^i$ について，その代わりに $i\gamma^i$ を考えることにすると，(E.1) の右辺は $\delta_{\mu\nu}$ とできる．以下添字は下付きで書くことにする．

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\mu \gamma_\nu = \delta_{\mu\nu} \, . \tag{E.3}$$

この結果，$\gamma_\mu$ はすべて 2 乗すると 1 となる．

ガンマ行列のかけ算によって生成される群を考える．4 次元の場合と同様，異なる $\gamma^\mu$ 同士の反可換性を用いて，任意の数のガンマ行列の積は，符号を除くと，一般形

$$\Gamma = (\gamma_0)^{n_0}(\gamma_1)^{n_1}\cdots(\gamma_{D-1})^{n_{D-1}} \qquad (n_i = 0, 1) \tag{E.4}$$

の形にできる．この積は明らかに全部で $2^D$ 個あり，$\Gamma_A$ $(A = 1, \ldots, 2^D)$ と書くことにする．具体的な形は単位行列（すべての $n_i = 0$），1 個のガンマ行列（どれか 1 つの $n_i$ だけ 1）に始まり，$D-1$ 個のガンマ行列の積，すべてのガンマ行列の積（すべての $n_i = 1$）までがある．

それぞれの逆行列は，

$$(\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\tau)(\gamma_\tau\cdots\gamma_\nu\gamma_\mu) = \gamma_\mu\gamma_\nu\cdots(\gamma_\tau\gamma_\tau)\cdots\gamma_\nu\gamma_\mu = \cdots = 1 \tag{E.5}$$

から容易にわかるように，

$$\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\tau\right)^{-1} = \gamma_\tau\cdots\gamma_\nu\gamma_\mu \tag{E.6}$$

である．ガンマ行列が全部で $n$ 個並んでいるとすると，この右辺のガンマ行列の順序を入れ替えて完全に逆順にしたとき，符号が

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \tfrac{1}{2}n(n-1) \tag{E.7}$$

回変わるので，結果的に

$$\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\tau\right)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{E.8}$$

が結論できる．この右辺は具体的には，$n = 0, 1 \mod 4$ のとき $+1$，それ以外のとき $-1$ となる．この結果は，

$$\Gamma_A{}^{-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Gamma_A \tag{E.9}$$

とも表せる．

これらの行列に符号まで含めると，$\{\pm\Gamma_A\}$ $(A = 1, \ldots, 2^D)$ の全部で $2 \times 2^D = 2^{D+1}$ 個の行列は，かけ算の下で閉じており，群をなしていることがわかる．この有限群の表現論を調べることにより，ガンマ行列の（既約な）表現としてどのようなものが存在するかを知ることができる．

その際に基本的な役割を果たすのは，有限群の表現に関する次の 2 つの定理である．

(1) 本質的に異なる（同値でない）既約表現の個数は，群の共役類の数に等しい．

共役類とは，群 $G$ の要素 $g, g' \in G$ に対し，もし 2 つが関係 $g' = aga^{-1}$ で結ばれるような要素 $a \in G$ が存在するときには同じ共役類に属するとして，群の要素を分類したものである．

(2) 既約表現の次元数を 2 乗したものを，すべての異なる既約表現に対して加えると，群の位数（次元，群に含まれる要素の数）に等しい．

まず，群の位数は $2^{D+1}$ なので，これらのうち共役類をなしているものがあるかどうか調べる．$\Gamma_A$ を $\Gamma_B$ と ${\Gamma_B}^{-1}$ ではさんだものは，順序の入れ替えにより符号を除いて $\Gamma_A$ に戻るので，2 つ以上の要素を含む共役類があるとすれば，$\{\pm\Gamma_A\}$ という 2 つの要素を含む類の可能性しかないことがまずわかる．そこで，$\Gamma_A$ の符号を変えることのできる $\Gamma_B$ が存在するかどうかを調べれば，すべての共役類を構成できる．

まず，1 に対しては，いかなる $\Gamma_B$ を持ってきても $\Gamma_B 1 {\Gamma_B}^{-1} = 1$ なので，それのみで 1 つの共役類である．$-1$ も同様．$\gamma_\mu$ に対しては，$\gamma_\nu$ $(\mu \neq \nu)$ ではさむと

$$\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\mu \tag{E.10}$$

となるので，$\{\pm\gamma_\mu\}$ がそれぞれの $\mu$ に対して 1 つの類をなす．$\gamma_\mu\gamma_\nu$ $(\mu < \nu)$ の場合は，$\gamma_\mu$ もしくは $\gamma_\nu$ ではさむと符号が変わるので同じく $\{\pm\gamma_\mu\gamma_\nu\}$ が類をなす．同様にして，奇数個のガンマ行列の積の場合は，その中に含まれない $\gamma_\lambda$ のいずれかではさめば符号が変わり，偶数個の積であれば，その中に含まれる $\gamma_\lambda$ のいずれかではさめばよい．このようにして，ガンマ行列を 1 つ以上含む $\Gamma_A$ の場合は，$\{\pm\Gamma_A\}$ で類になっていることがわかる．但し，注意が必要なのは $D$ 個のガンマ行列の積であるいちばん最後の行列

$$\Gamma_\Omega = \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{D-1} \tag{E.11}$$

である．$D$ が偶数ならばよいが，奇数の場合は，符号を変えようとしても，積の中に含まれない $\gamma_\lambda$ は存在しないので，どの $\gamma_\lambda$ ではさんでも符号を変えることはできない．より一般の $\Gamma_B$ を考えたとしても，上で見た ${\Gamma_B}^{-1}$ の形に注意すると，その中に含まれる $\gamma_\lambda$ を内側から一つずつ消していけば，1 つではさむ場合と違いは生じないので，結局 $D$ が奇数の場合は，$\{\Gamma_\Omega\}$ と $\{-\Gamma_\Omega\}$ は別の類となる．これより，$D$ が偶数の場合は，同値類の個数は $2^D + 1$, $D$ が奇数の場合は $2^D + 2$ となることがわかる．

次に，どのような表現が存在するか見ると，1 次元の表現がいくつかあることがわかる．自明なのは恒等表現（すべての要素に 1 を対応させる）であるが，例えば $\Gamma_A$ 中のガンマ行列の数が偶数なら 1，奇数なら $-1$ とすれば 1 つの表現になっている．あるいは，ある特定の $\gamma_\lambda$ に注目し，それが含まれていなければ 1, 含まれていれば $-1$ とすれば，これも 1 つの表現である．一般には，$n_0$, $n_1, \ldots, n_{D-1}$ のうち，任意個の好きなもの（$n_i, n_j, \ldots, n_k$ としよう）を選んできて，

$$(-1)^{n_i}(-1)^{n_j} \cdots (-1)^{n_k} = (-1)^{n_i + n_j + \cdots + n_k} \tag{E.12}$$

を作ると，これは 1 次元表現である．どれも選ばなければ恒等表現，すべて選んだ場合は上で 2 つめに述べた表現の場合となる．このようなものは全部で $2^D$

個ある．これらは明らかにすべて非同値で既約である．(1 次元表現は必ず既約.) これらの中には忠実な表現は存在しないことを注意しておこう．

このことと上で述べた既約表現の数を比較すると，$D$ が偶数の場合は，これら以外の既約表現は 1 つだけ存在し，奇数の場合は 2 つ存在することが結論できる．$D$ が偶数のときは，この最後の表現の次元は，$\sqrt{2^{D+1}-2^D}=2^{D/2}$ であることまでわかる．$D=4$ の場合，これは 4 次のガンマ行列に対応しており，ガンマ行列のあらゆる表示が同値であることも，4 次元の既約表現が 1 つしかないことから結論できる．このように，D.1 節で構成的に証明した事実が，群論を用いると半自動的に導出できる．

$D$ が奇数の場合は，残った 2 つの既約表現は，その次元の 2 乗の和が $2^D$ であることがわかる．2 つの表現は次元が等しく，いずれも $2^{\frac{D-1}{2}}$ 次元の表現であることが知られる．このそれぞれは，独立な成分が $2^{D-1}$ 個しかないので，$2^D$ 個の $\Gamma_A$ は 1 次独立ではありえないことになる．すなわち，この表現は忠実な表現ではない．2 つの既約表現の直和を作ると，$2^{\frac{D+1}{2}}$ 次元の行列となり，可約ではあるが忠実な表現を作ることができる．

## E.2 $D$ 次元時空におけるスピノル

前節では便宜上 $\gamma_i^2=1$ となるようにガンマ行列を定義したが，これ以後はもとのミンコフスキー計量に戻すことにする．$\gamma^\mu$ のみたす性質は

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\mu\gamma^\nu=2g^{\mu\nu}=2\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&\ddots\end{pmatrix}, \tag{E.13a}$$

$$(\gamma^0)^\dagger=\gamma^0\,,\qquad(\gamma^i)^\dagger=-\gamma^i\quad(i=1,\dots,D-1) \tag{E.13b}$$

である．前節の結果より，$D$ が偶数か奇数かで状況が異なる．まず偶数次元の場合から見ていく．

4 次元の場合と同様，$\gamma^\mu$ の積で生成される $\Gamma$ 全体は $2^D$ 個の独立な行列を与えるので，最低 $2^{D/2}$ 次の行列が必要であるが，実際この次数の行列で (E.13) をみたすものを具体的に構成できる．したがって $2^D$ 個の $\Gamma$ により任意の $2^{D/2}$ 次の行列を展開できることになる．$D$ 次元時空ではこの $\gamma^\mu$ の作用する，$2^{D/2}$ 成分を持つディラックスピノル $\psi$ を定義でき，4 次元と同じ形のディラック方程式

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu-mc)\psi(x)=0 \tag{E.14}$$

を書くことができる．

$D$ 個の $\gamma^\mu$ 全部の積

$$\Gamma_\Omega = \gamma^0\gamma^1\cdots\gamma^{D-1} \tag{E.15}$$

は，$\gamma^\mu$ のいずれとも反可換であることが (E.13a) より示せる．$\Gamma_\Omega$ を 2 乗すると，(E.13) を用いて，

$$\Gamma_\Omega^2 = (-1)^{(D-1)(D-2)/2} = \begin{cases} +1 & D=1,\,2 \mod 4 \\ -1 & D=3,\,4 \mod 4 \end{cases} \tag{E.16}$$

となる．そこで

$$\gamma_\Omega = \begin{cases} \Gamma_\Omega & D=1,\,2 \mod 4 \\ i\Gamma_\Omega & D=3,\,4 \mod 4 \end{cases} \tag{E.17}$$

と定義すると，$\gamma_\Omega^2 = 1$ であり，また $\gamma_\Omega^\dagger = \gamma_\Omega$ となる．これを用いて射影演算子

$$\frac{1 \pm \gamma_\Omega}{2} \tag{E.18}$$

が定義でき，実質 $2^{D/2-1}$ 成分のヴァイルスピノルを構成できる．

次に，荷電共役行列 $C$ を考える．$C$ は関係

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu \tag{E.19}$$

をみたすユニタリ行列として定義する．時空が偶数次元の場合，ガンマ行列の同値性より，このようなユニタリ行列は必ず存在する．$2^D$ 個の $\Gamma$ に対して，$C\Gamma^T C^{-1}$ がどうなるかを調べる．$n$ 個の異なる $\gamma^\mu$ の積に対し，

$$\begin{aligned}
C(\underbrace{\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots\gamma^\tau}_{n\text{ 個}})^T C^{-1} &= C\gamma^{\tau T}\cdots\gamma^{\nu T}\gamma^{\mu T}C^{-1} \\
&= C\gamma^{\tau T}C^{-1}\cdots C\gamma^{\nu T}C^{-1}\,C\gamma^{\mu T}C^{-1} \\
&= (-1)^n\gamma^\tau\cdots\gamma^\nu\gamma^\mu \\
&= (-1)^n(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots\gamma^\tau \\
&= (-1)^{n(n+1)/2}\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots\gamma^\tau \\
&= \begin{cases} +\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots\gamma^\tau & n=3,\,4 \mod 4 \\ -\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots\gamma^\tau & n=1,\,2 \mod 4 \end{cases}
\end{aligned} \tag{E.20}$$

となる．$C\Gamma^T C^{-1} = +\Gamma$ となる $\Gamma$ の個数から $-\Gamma$ となるものの個数を引いた数 $\Delta$ は，

$$\Delta = \sum_{n=0}^{D} {}_DC_n\,(-1)^{n(n+1)/2} \tag{E.21}$$

であるが，

$$(-1)^{n(n+1)/2} = \tfrac{1}{2}\left[i^n + (-i)^n + i^{n+1} + (-i)^{n+1}\right] \tag{E.22}$$

と書けることを用いると，$(1+x)^D = \sum_{k=0}^{D} {}_DC_n x^n$ から

$$\begin{aligned} \Delta &= \tfrac{1}{2}\left[(1+i)(1+i)^D + (1-i)(1-i)^D\right] \\ &= 2^{\frac{D+1}{2}} \cos \tfrac{D+1}{4}\pi \\ &= \begin{cases} -2^{D/2} & D = 2,\, 4 \mod 8 \\ +2^{D/2} & D = 6,\, 8 \mod 8 \end{cases} \end{aligned} \tag{E.23}$$

となる．これより $C\Gamma^T C^{-1} = +\Gamma$ となる $\Gamma$ の個数は

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}2^{D/2}(2^{D/2}-1) & D = 2,\, 4 \mod 8 \\ \tfrac{1}{2}2^{D/2}(2^{D/2}+1) & D = 6,\, 8 \mod 8 \end{cases} \tag{E.24}$$

この数は，それぞれ $2^{D/2}$ 次の行列のうち反対称，対称なものの自由度とちょうど等しい．このことから，4 次元時空の場合と同様にして，

$$C^T = \lambda C\,, \qquad \lambda = \begin{cases} -1 & D = 2,\, 4 \mod 8 \\ +1 & D = 6,\, 8 \mod 8 \end{cases} \tag{E.25}$$

と結論される．

$\psi$ の荷電共役は $\psi^c = C\bar{\psi}^T = C\gamma^{0T}\psi^*$ で定義されるが，これから $(\psi^c)^c$ を求めると

$$\begin{aligned} (\psi^c)^c &= C\gamma^{0T}\left(C\gamma^{0T}\psi^*\right)^* \\ &= C\gamma^{0T}C^*\gamma^{0\dagger}\psi \\ &= C\gamma^{0T}(C^{-1}C)C^*\gamma^0\psi \\ &= -\gamma^0 C(\lambda C^\dagger)\gamma^0\psi \\ &= -\lambda\psi \end{aligned} \tag{E.26}$$

となる．マヨラナスピノルは $\psi^c = \psi$ で定義するが，そのときこの関係から $\psi^c = -\lambda\psi$ が成り立つため，もし $\lambda = 1$ であると $\psi = 0$ となってしまう．したがって，マヨラナスピノルは $D = 2,\, 4 \mod 8$ の場合にだけ存在する．

次に，$\gamma_\Omega$ と $C$ の関係を見る．(E.20) で $n = D$ として

$$C{\gamma_\Omega}^T = \pm\gamma_\Omega C \tag{E.27}$$

($D = 4 \mod 4$ のとき $+$, $D = 2 \mod 4$ のとき $-$) となる．これは，$D = 4 \mod 4$ の場合は荷電共役により $\gamma_\Omega$ の固有値の符号が変わる（左巻きと右巻きが入れかわる）ことを意味している．一方，$D = 2 \mod 4$ の場合は，荷電共役を行っても同じカイラリティである．このことから，$D = 4 \mod 8$ ではマヨラナスピノルにさらにカイラル射影すると，マヨラナ条件をみたさなくなってしまう．一方，$D = 2 \mod 8$ の場合，マヨラナ条件とカイラル射影は両立できる．これをマヨラナヴァイルスピノルと呼び，その自由度はディラックの場合の 4 分の 1 となる．

今までは偶数次元時空の解析であったが，今度は奇数次元の場合に移る．偶数次元の場合，$\gamma_\Omega$ はどの $\gamma^\mu$ とも反可換であったが，奇数次元だとすべての $\gamma^\mu$，したがってあらゆる $\Gamma$ と可換になる．(既約表現では）シューアの補題によりこのような行列は単位行列に比例している．さらに，$\gamma_\Omega^2 = 1$ より，$\gamma_\Omega = \pm 1$ の 2 通りがありうる．前節で，奇数次元の場合にガンマ行列の表示に同値でない 2 種類のものがあることを見たが，これはちょうどその 2 つに対応する．具体的には，$\gamma_\Omega = 1$ となるような $\gamma^\mu$ の組が 1 つあったとして，$\gamma^\mu$ の全部の符号を変えたものをつくると $\gamma_\Omega = -1$ となり，この 2 組は同値でないことがわかる．このような奇数時空次元のガンマ行列は，前節で述べたように $2^{\frac{D-1}{2}}$ 次の行列，すなわち，次元の 1 つ低い偶数時空次元のガンマ行列の次数と同じである．このようなガンマ行列を具体的に構成するには，$D-1$ 次元時空の $D-1$ 個のガンマ行列 $\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^{D-2}$ に，$D-1$ 次元の $\gamma_\Omega$（偶数次元なので $\gamma^\mu$ と反可換）を $\pm i$ 倍したものを $\gamma^{D-1}$ として加えれば，$D$ 次元時空のガンマ行列の性質をちょうどみたしていることが言える．(例えば 5 次元の場合は，4 次元の $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ に，$\gamma^4 = \pm i\gamma_5$ を加えればよい．)

$\gamma_\Omega = \pm 1$ であるということは，異なる $n$ 個のガンマ行列の積と，それに含まれない $(D-n)$ 個の積は，かけると $\pm 1$ になるので，この 2 つが符号を除いて等しいことを意味する．したがって，独立な $\Gamma$ は，$(D-1)/2$ 個の積までで尽きる．これらの総数は $2^D/2 = 2^{D-1}$ となり，前節で求めたものと一致する．これらの作用する $2^{\frac{D-1}{2}}$ 成分を持つスピノルを奇数次元の場合のディラックスピノルとする．$\gamma_\Omega$ が $\pm 1$ であることから，これからカイラル射影子は作れず，奇数次元ではヴァイルスピノルは存在しない．

次に，荷電共役行列が存在するかどうかを調べる．これには，$\{\gamma^\mu\}$ が生成する表現と，$\{-\gamma^{\mu T}\}$ がつくる表現とが同値であるかどうかがわかればよい．そこで，$D$ 個のガンマ行列の積を作ってみる．

$$
\begin{aligned}
(-\gamma^0)^T \cdots (-\gamma^{D-1})^T &= (-1)^D \gamma^{0T}\gamma^{1T} \cdots (\gamma^{D-1})^T \\
&= (-1)^D \left(\gamma^{D-1} \cdots \gamma^1\gamma^0\right)^T \\
&= (-1)^D (-1)^{(D-1)+(D-2)+\cdots+1} \left(\gamma^0 \cdots \gamma^{D-1}\right)^T \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}D(D+1)} \left(\gamma^0 \cdots \gamma^{D-1}\right)^T
\end{aligned}
\tag{E.28}
$$

であるが，$D = 1 \mod 4$ の場合は，頭の符号が負であるため，$\{-\gamma^{\mu T}\}$ から作った $\gamma_\Omega$ ともとの $\gamma_\Omega$ は符号が逆になる．これらはガンマ行列の同値でない表現に属するので，2 つを結ぶ変換に対応する荷電共役行列 $C$ は存在しない．$D = 3 \mod 4$ であれば，符号が正なので $C$ が存在する．この場合，$C$ が対称か反対称かは偶数次元と同種の方法により調べることができ，$D = 3 \mod 8$ の場合 $C^T = -C$，$D = 7 \mod 8$ では $C^T = C$ である．このことから，$D = 3$

mod 8 のときにマヨラナスピノルが存在できることが言える.

以上をまとめて，各時空次元においてどのようなスピノルが存在できるかを表にしておく.

| $D$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ヴァイル | ○ | × | ○ | × | ○ | × | ○ | × | ○ | × |
| マヨラナ | ○ | ○ | ○ | × | × | × | × | × | ○ | ○ |
| マヨラナヴァイル | ○ | × | × | × | × | × | × | × | ○ | × |

# 付録 F
# 時間反転

## F.1 量子力学における時間反転

3.4.2 節で，シュレーディンガー方程式を素直に時間反転するとうまく行かず，$t \to -t$ としたシュレーディンガー方程式は波動関数の複素共役に対するものと解釈すべきことを述べた．このことを端的に示すのは，正準交換関係式 $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ である．時間反転のもとでは，空間座標は変わらず，運動量の符号は変わるべきなので，$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{p}' = -\boldsymbol{p}$ となるが，すると $[x'_i, p'_j] = -i\hbar\delta_{ij}$ となってしまう．この関係で，通常の数は複素共役を取るものとすれば，変換後も通常の正準交換関係式が成立する*1)．

このように，時間反転は複素共役を伴う変換であり，波動関数とその複素共役を入れ換える．空間回転や空間反転などの変換はユニタリ変換であり，ユニタリ変換 $\mathcal{U}$ は，一般に任意の状態の間の内積を変えないという性質

$$(\mathcal{U}\alpha, \mathcal{U}\beta) = (\alpha, \beta) \tag{F.1}$$

を持つ．時間反転 $\mathcal{T}$ は，これとは異なり，性質

$$(\mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\beta) = (\alpha, \beta)^* = (\beta, \alpha) \tag{F.2}$$

を持つ．このような演算子を反ユニタリ演算子と呼ぶ．ここで，状態 $\beta$ を複素数 $c$ 倍したものを考えると，

$$(\mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}c\beta) = (\alpha, c\beta)^* = c^*(\alpha, \beta)^* = c^*(\mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\beta) \tag{F.3}$$

となる．$\mathcal{T}\alpha$ は任意なので，これは

---

*1) そもそも，$-1$ の 2 つの平方根のうち，どちらを $i$ と呼ぶかは全く勝手であり，$-i$ を $i$ と呼んでも複素数の構造は何も変わらない．量子力学でも，運動量が $-i\hbar\nabla$ で表されるというのは単なる約束であり，$i\hbar\nabla$ としても（それで最初から最後まで統一すれば）何ら差し支えない．複素共役は，このように同型を与える操作である．波動関数をすべてその複素共役に置き換えても，物理は変わらない．

$$\mathcal{T}c\big|\beta\big\rangle = c^*\mathcal{T}\big|\beta\big\rangle \tag{F.4}$$

を意味する．一般には

$$\mathcal{T}\big(c_1\big|\beta_1\big\rangle + c_2\big|\beta_2\big\rangle\big) = c_1^*\mathcal{T}\big|\beta_1\big\rangle + c_2^*\mathcal{T}\big|\beta_2\big\rangle\ . \tag{F.5}$$

このような性質をみたす演算子を反線形演算子と呼ぶ．すなわち，時間反転演算子は反ユニタリ演算子であり反線形性を持つ．

内積の記法で書くと間違いがないが，ブラケット記法を用いる場合には，演算子がどちらに作用するかに気をつけないといけない．例えば，

$$\big\langle\alpha\big|\mathcal{T}\big|\beta\big\rangle = \big\langle\alpha\big|\overleftarrow{\mathcal{T}}\big|\beta\big\rangle^* \tag{F.6}$$

であり，$\mathcal{T}\big|\alpha\big\rangle = \big|\mathcal{T}\alpha\big\rangle$ と書けば，

$$\big\langle\alpha\big|\mathcal{T}\beta\big\rangle = \big\langle\mathcal{T}\alpha\big|\beta\big\rangle^* \tag{F.7}$$

となる．

状態ベクトルに対するシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}\big|\psi\big\rangle = H\big|\psi\big\rangle \tag{F.8}$$

に対して時間反転演算子 $\mathcal{T}$ を作用させると，

$$\mathcal{T}i\hbar\frac{d}{dt}\big|\psi\big\rangle = -i\frac{d}{dt}\mathcal{T}\big|\psi\big\rangle \tag{F.9}$$

より，

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\mathcal{T}\big|\psi\big\rangle = \mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\big|\psi\big\rangle \tag{F.10}$$

であり，$t' = -t$ として

$$i\hbar\frac{d}{dt'}\mathcal{T}\big|\psi\big\rangle = \mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\big|\psi\big\rangle \tag{F.11}$$

となる．ハミルトニアンが

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x}) \tag{F.12}$$

という形をしている場合，時間反転のもとで

$$\mathcal{T}\boldsymbol{x}\mathcal{T}^{-1} = \boldsymbol{x}\ , \tag{F.13}$$

$$\mathcal{T}\boldsymbol{p}\mathcal{T}^{-1} = -\boldsymbol{p} \tag{F.14}$$

とすれば，ハミルトニアンは時間反転不変

$$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = H \tag{F.15}$$

であり，シュレーディンガー方程式も時間反転のもとで不変

$$i\hbar\frac{d}{dt'}\mathcal{T}|\psi\rangle = H\,\mathcal{T}|\psi\rangle \tag{F.16}$$

となる．

# 参考文献


[1] H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms* (Springer, 1957; Plenum 1977; Dover 2008).

[2] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw–Hill, 1964).

[3] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw–Hill, 1964).

[4] P.A.M. Dirac, *Proceedings of the Royal Society (London)* A **117**, 610 (1928).

[5] P.A.M. Dirac, *Proceedings of the Royal Society (London)* A **118**, 351 (1928).

[6] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th edition (Oxford University Press, 1958; みすず書房，1963).

[7] L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, *Physical Review* **78**, 29 (1950).

[8] A. Messiah, *Quantum Mechanics* (Wiley, 1958; Dover, 2008).

[9] 西島和彦『相対論的量子力学』新物理学シリーズ 13（培風館，1973）.

[10] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (Benjamin/Cummings, 1981); Second Edition (Addison–Wesley, 1989).

[11] L. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition (McGraw–Hill, 1968).

# 索　引

## 欧字



## ア



## カ



## サ



## タ



## ハ



## マ



## ラ

## 著者略歴

**日笠 健一**（ひかさ けんいち）

1983 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了（理学博士）
1984 年　ウィスコンシン大学マディソン校研究員
1986 年　高エネルギー物理学研究所助手
1992 年　東北大学理学部助教授
1995 年　東北大学大学院理学研究科助教授
1996 年　東北大学大学院理学研究科教授
現在に至る

**専　門**　素粒子物理学（理論）

**主要著書**

『量子力学』（朝倉書店，2008）



臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-105

『ディラック方程式　相対論的量子力学と量子場理論』

著　者　日笠 健一

2014 年 3 月 25 日　初版発行

数理科学編集部　　発行人　木 下 敏 孝

TEL.(03)5474-8816

FAX.(03)5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp

ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 © 株式会社 サ イ エ ン ス 社　TEL.(03)5474-8500(代表)

〒151-0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-3-25　振替 00170-7-2387　(03)5474-8600(広告部)





組版　クォンタ
印刷　(株) シナノ　中澤 眞
製本　(株) 関川製本所　関川安博